



Préparation à l'oral

Math - Algèbre
Semaine du 26 Mai

Sujet OB-AL-1

1. Justifier la convergence et déterminer la valeur de l'intégrale $u_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt, n \in \mathbb{N}$.
2. Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$. On pose $F_P(x) = \int_0^{+\infty} (t^2 + 4xt + x^2) P(t) e^{-t} dt$ et $\varphi : P \mapsto F_P$.
 - a. Montrer que $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ et déterminer sa matrice dans la base canonique de E .
 - b. φ est-il bijectif? diagonalisable ?

Solution du sujet OB-AL-1 : Math II 2024

1. On a fait ce calcul 100 fois. La convergence de chaque intégrale se montre car $t^n e^{-t} = o(1/t^2)$, lorsque $t \rightarrow +\infty$ (et une comparaison - pour des fonctions à valeurs positives - à une intégrale de Riemann convergente). Une IPP permet d'obtenir $u_{n+1} = (n+1)u_n$ et comme $u_0 = 1$, une récurrence permet de montrer que $u_n = n!$.
2. a. F_P s'écrit comme combinaison d'intégrales convergentes. Plus précisément, pour $P \in E$, $t \mapsto (t^2 + 4xt + x^2)P(t)$ est une fonction polynomiale de degré 4 et pour la raison citée à la question précédente, F_P est donc bien défini. En observant que

$$F_P(x) = \int_0^{+\infty} t^2 P(t) e^{-t} dt + 4x \int_0^{+\infty} t P(t) e^{-t} dt + x^2 \int_0^{+\infty} P(t) e^{-t} dt,$$

on a bien une expression polynomiale (en x) de degré 2 donc $F_P \in E$. Reste à voir que c'est linéaire. Il suffit de voir que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$P \mapsto \int_0^{+\infty} t^k P(t) e^{-t} dt$$

est bien linéaire, ce qui est clair par linéarité de l'intégrale généralisée (toutes les intégrales sont convergentes). De plus,

$$\varphi(1) = \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t} dt + 4x \int_0^{+\infty} t e^{-t} dt + x^2 \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = u_2 + 4u_1 x + u_0 x^2 = 2 + 4x + x^2,$$

$$\varphi(X) = \int_0^{+\infty} t^3 e^{-t} dt + 4x \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t} dt + x^2 \int_0^{+\infty} t e^{-t} dt = u_3 + 4u_2 x + u_1 x^2 = 6 + 8x + x^2,$$

$$\varphi(X^2) = \int_0^{+\infty} t^4 e^{-t} dt + 4x \int_0^{+\infty} t^3 e^{-t} dt + x^2 \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t} dt = u_4 + 4u_3 x + u_2 x^2 = 24 + 24x + 2x^2,$$

ce qui donne

$$A = \text{Mat}(\varphi, \mathcal{B}_c) = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 24 \\ 4 & 8 & 24 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

- b. On voit facilement que A est inversible donc φ est bijective (déterminant non nul ou bien noyau réduit au vecteur nul).

On détermine les valeurs propres de cette matrice.

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) &= \det \left(\begin{pmatrix} \lambda - 2 & -6 & -24 \\ -4 & \lambda - 8 & -24 \\ -1 & -1 & \lambda - 2 \end{pmatrix} \right) = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -6 & -24 \\ 0 & \lambda - 4 & -4(\lambda + 4) \\ -1 & -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -(4 + \lambda) & -24 \\ 0 & \lambda - 4 & -4(\lambda + 4) \\ -1 & 0 & \lambda - 2 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 2)^2(\lambda - 4) - 4((\lambda + 4)^2 + 6(\lambda - 4)) \\ &= (\lambda - 2)^2(\lambda - 4) - 4(\lambda^2 + 14\lambda - 8) \\ &= \lambda^3 - 12\lambda^2 - 36\lambda + 16 \end{aligned}$$

Il n'y a pas de racine évidente. On étudie alors la fonction pour compter le nombre de zéros.

La dérivée est $\chi'_A : t \mapsto 3(t^2 - 8t - 12)$ admettant pour zéros $4 \pm 2\sqrt{7}$... En remarquant que $\chi_A(0) > 0$, $\chi_A(1) < 0$ puis $\chi_A(10) > 0$, on dénombre (à l'aide du théorème de la bijection appliqué sur chaque intervalle où χ_A est strictement monotone) 3 racines ce qui garantit que A (donc φ) est diagonalisable.