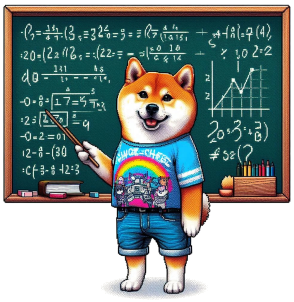
Mathématiques & Informatique - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
Lycée Voltaire, Paris 11e.



Préparation à l'oral

Math - Algèbre
Semaine du 26 Mai

Sujet OB-AL-2

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$. À tout polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} p_k X^k$ de E on associe le polynôme

$$f_n(P) = \sum_{k=0}^{n} p_{n-k} X^k.$$

1. Montrer que f_n est un endomorphisme de E.

2. Écrire la matrice de f_n dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

3. On note :

$$S_n = \{P \in E \mid f_n(P) = P\} \quad \text{et} \quad T_n = \{P \in E \mid f_n(P) = -P\}$$

a. Montrer que S_n et T_n sont supplémentaires dans E.
b. On note $s_n = \dim S_n$ et $t_n = \dim T_n$. Exprimer s_n et t_n en fonction de n.

Solution du sujet OB-AL-2 : Math II 2025

1. Il est clair que f_n est à valeurs dans $\mathbb{R}_n[X]$, au vu de sa définition. Si P, Q deux polynômes tels que

$$P = \sum_{k=0}^{n} p_k X^k, \qquad Q = \sum_{k=0}^{n} q_k X^k$$

alors, pour $\lambda \in \mathbb{R}$, le polynôme $\lambda P + Q$ s'écrit

$$\lambda P + Q = \sum_{k=0}^{n} (\lambda p_k + q_k) X^k = \sum_{k=0}^{n} r_k X^k$$

avec $r_k = \lambda p_k + q_k$ donc $r_{n-k} = \lambda p_{n-k} + q_{n-k}$ et il suit que

$$f_n(\lambda P + Q) = \sum_{k=0}^{n} (\lambda p_{n-k} + q_{n-k}) X^k = \lambda \sum_{k=0}^{n} p_{n-k} X^k + \sum_{k=0}^{n} q_{n-k} X^k = \lambda f_n(P) + f_n(Q),$$

et f_n est bien linéaire : c'est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. On peut réécrire $f_n(X) = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} p_j X^{n-j}$, de sorte que, pour $k \in [\![0, n]\!]$, $f_n(X^k) = X^{n-k}$ ce qui donne la matrice

$$A_n = \mathrm{Mat}(f_n, \mathscr{B}_c) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Observons que cette matrice est symétrique (réelle) donc diagonalisable.

3. S_n et T_n sont (respectivement) les sous-espaces propres de f_n associées à 1 et -1.

a. On commence par montrer que la somme est directe, en montrant que l'intersection est réduite à 0. C'est assez clair. Si $f_n(P) = P = -P$ alors $P = 0$. On peut aussi citer le fait que deux sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux car la matrice est symétrique.

On peut observer aussi assez facilement que $A_n^2 = I_n$ (de manière assez claire $f_n \circ f_n = \mathrm{Id}$) donc f_n est une symétrie, ses valeurs propres ne sont que 1 et -1, elle est diagonalisable, ce n'est ni l'identité, ni $-\mathrm{Id}$, donc S_n et T_n ne sont réduits au vecteur nul et ils sont bien supplémentaires.

b. On résout. Notons $U = \mathrm{Mat}(P, \mathscr{B}_c)$.

$$A_n U \quad = \quad U \iff \forall k \in \left[\!\left[0, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right]\!\right], \ p_k = p_{n-k}$$

Distinguons deux cas :

- ✗ Si n est pair (donc $\dim(R_n[X] = n+1$ est impair), on a : $\dim(S_n) = \dfrac{n}{2} + 1$ et $\dim(T_n) = \dfrac{n}{2}$.
- ✗ Si n est impair (donc $\dim(R_n[X] = n+1$ est pair), on a : $\dim(S_n) = \dfrac{n+1}{2}$ et $\dim(T_n) = \dfrac{n+1}{2}$.