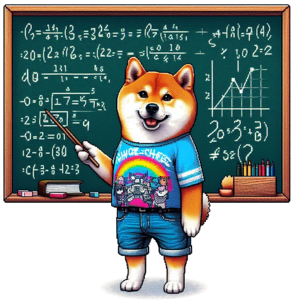
Mathématiques PT. 2025 - 2026

Mathématiques & Informatique - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
Lycée Voltaire, Paris 11e.



Préparation à l'oral

Math - Algèbre
Semaine du 26 Mai

Sujet OB-AL-3

Pour $n \geqslant 3$ on considère la matrice $A_n = (\min(i,j))_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$.

1. Déterminer le déterminant de A_3, puis de A_n.

2. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur. Montrer que $X^\top A_n X = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{p=k}^{n} x_p \right)^2$.

3. Montrer que les valeurs propres de A_n sont réelles et positives.

4. A_n est elle inversible ? Si oui, calculer son inverse.

Solution du sujet OB-AL-3 : Math I 2017

1. $A_n = (\min(i,j))_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix}$. Les opérations $L_k \longleftarrow L_k - L_{k-1}$, effectuées successivement pour $k=n$, $k=n-1$, ..., $k=2$, montrent que $\det A_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ pour tout n. On en déduit $\det A_n = 1$ car ce dernier déterminant est triangulaire supérieure.

2. Posons $U = (u_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ définie par $u_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \leqslant j \\ 0 & \text{si } i > j \end{cases}$, soit $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$, et montrons que $A_n = U^\top U$.

En effet, le terme général de $U^\top U$ est $b_{ij} = \sum_{k=1}^{n} u_{ki}u_{kj}$. Or u_{ki} est nul dès que $k > i$ et u_{kj} est nul dès que $k > j$ donc $b_{ij} = \sum_{k=1}^{\min(i,j)} u_{ki}u_{kj} = \min(i,j)$ car $u_{ki} = u_{kj} = 1$ lorsque $k \leqslant \min(i,j)$.

On a alors $X^\top A_n X = X^\top U^\top U X = (UX)^\top (UX) = \|UX\|^2$ où $\|.\|$ désigne la norme usuelle de $\mathbb{R}^n$.

Or $UX = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + \ldots + x_n \\ x_2 + \ldots + x_n \\ \vdots \\ x_{n-1} + x_n \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{p=1}^{n} x_p \\ \sum_{p=2}^{n} x_p \\ \vdots \\ \sum_{p=n-1}^{n} x_p \\ \sum_{p=n}^{n} x_p \end{pmatrix}$, ce qui donne $X^\top A_n X = \|UX\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{p=k}^{n} x_p \right)^2$.

3. A_n est symétrique réelle, donc diagonalisable dans $\mathbb{R}$: ses valeurs propres sont toutes réelles.
Soit λ une valeur propre de A_n et X un vecteur propre associé. On a alors $X^\top A_n X = \lambda X^\top X = \lambda \|X\|^2$ donc, avec ce qui précède et puisque $X \neq 0$, $\lambda = \dfrac{\|UX\|^2}{\|X\|^2} \geqslant 0$.
A_n est inversible puisque son déterminant est non nul. Il en découle que 0 n'est pas valeur propre, et donc les valeurs propres sont strictement positives.

4. A_n est inversible comme on vient de le dire.
Les opérations $L_i \longleftarrow L_i - L_{i+1}$ pour i variant de 1 à $n-1$ (dans ce sens) permettent de passer directement de U à I_n.
On a alors U^{-1} transformée de I_n par la même séquence d'opérations, ce qui donne

$$U^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 1 & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad A^{-1} = U^{-1}\left(U^\top\right)^{-1} = U^{-1}\left(U^{-1}\right)^\top = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$