



Préparation à l'oral

Math - Algèbre
Semaine du 2 Juin

Sujet OB-AL-5

Soit $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, muni de sa base canonique

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

Soit $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $F = \text{Vect}(2I_2, A, B)$.

1. Déterminer une base de F et donner sa dimension.
2. Déterminer une équation cartésienne de F relativement à la base \mathcal{B} .
3. F est-il stable par multiplication?
4. Soient $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $G = \text{Vect}(C)$
 - a. Montrer que $E = F \oplus G$.
 - b. Déterminer la matrice de p projecteur sur F parallèlement à G dans la base \mathcal{B} .

Solution du sujet OB-AL-5 : Math II 2025

1. Observons que $F = \text{Vect}(I_2, A, B)$. La famille (I_2, A, B) est, par définition, génératrice de F , mais on ne peut pas conclure qu'elle forme une base avant d'avoir montré qu'elle était libre. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$.

$$aI_2 + bA + cB = 0 \iff \begin{cases} a + b - c = 0 \\ 2b = 0 \\ 2c = 0 \\ a + b + c = 0 \end{cases} \\ \iff a = b = c = 0$$

ainsi la famille (I_2, A, B) est bien libre. Elle forme donc une base de F qui est de dimension 3.

Remarque. F est donc un hyperplan de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui est un espace de dimension 4.

2. On cherche donc une équation (ou un système d'équation) vérifiée(es) par les composantes d'une matrice M et qui caractérise l'appartenance à F . On a

$$M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in F \iff \exists a, b, c \in \mathbb{R}, M = aI_2 + bA + cB \iff \exists a, b, c \in \mathbb{R}, \begin{cases} a + b - c = x \\ 2b = y \\ 2c = z \\ a + b + c = t \end{cases} \\ \iff \exists a, b, c \in \mathbb{R}, \begin{cases} a = x + z/2 - y/2 \\ b = y/2 \\ c = z/2 \\ a + b + c = t \end{cases} \\ \iff x + \frac{z}{2} - \frac{y}{2} + \frac{y}{2} + \frac{z}{2} = t \\ \iff x + z - t = 0.$$

3. Calculons AB . On a

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

qui n'est pas une matrice de F car ses composantes ne vérifient pas l'équation de F . Ainsi, F n'est pas stable par produit.

4. a. G est donc un sous-espace de dimension 1. Il suffit de montrer que G est en somme directe avec F pour qu'ils soient supplémentaires dans E car la somme des dimensions est égale à la dimension de E . Pour ce faire, on montre que l'intersection est réduite au vecteur nul. Soit $M \in G \cap F$. Comme $M \in G$, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $M = \begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix}$ mais $M \in F$ donc vérifie l'équation de F et donc $a + a - a = 0$ ou encore $a = 0$ et donc $M = 0$. Le tour est joué.
- b. Une méthode pour obtenir cette matrice est la suivante. La matrice de cette projection dans une base (M_1, M_2, M_3, M_4) adaptée à la décomposition $E = F \oplus G$ est

$$P_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On écrit alors la matrice de passage Q de la base canonique vers la base adaptée à la somme directe $F \oplus G$. On l'inverse. Par formule de changement de base, La matrice demandée sera alors $P = QP_0Q^{-1}$. On a

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

qui s'inverse par pivot simultané pour donner

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

et enfin

$$P = QP_0Q^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$