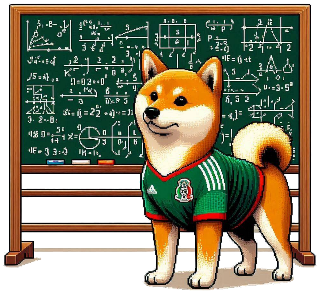

Préparation à l'oral

Math - Algèbre
Semaine du 2 Juin

Sujet OB-AL-7

1. Soit $\mathbb{R}^4$ muni sa base canonique. Déterminer la matrice de projection orthogonale de $\mathbb{R}^4$ sur F qui est défini par le système suivant:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = & 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 & = & 0 \end{array} \right. .$$

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$:

$$(x+i)^5 - (x-i)^5 = 0.$$

Solution du sujet OB-AL-7 : Math II 2024

C'est un pur exercice de questions de cours !!

1. On commence par trouver une b.o.n de l'espace sur lequel on projette, en commençant par trouver une base de celui-ci.

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in F \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = & 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcl} x_3 & = & -x_1 \\ x_4 & = & -x_2 \end{array} \right. \iff X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Donc $F = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right) =: \mathrm{Vect}(u, v)$.

Les vecteur u et v on le bon goût d'être déjà orthogonaux, il suffit de les normaliser pour avoir une b.o.n de F. On prend donc

$$\tilde{u} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad \tilde{v} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

La projection orthogonalep_F d'un vecteur x sur F s'écrit donc

$$p_F(x) = \langle x, \tilde{u} \rangle \tilde{u} + \langle x, \tilde{v} \rangle \tilde{v}.$$

On applique cette formule aux quatre vecteurs de la base canonique pour obtenir la matrice de p_F dans cette dernière

$$\mathrm{Mat}\,(p_F,\ \mathcal{B}_c) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. On résout cette équation en faisant intervenir les racines de l'unité.

$$\begin{aligned}
(x+i)^5 - (x-i)^5 = 0 &\iff (x+i)^5 = (x-i)^5 \\
&\iff \left(\frac{x+i}{x-i} \right)^5 = 1 \qquad \text{car } x = i \text{ n'est pas solution donc } x \neq i \\
&\iff \exists\, k \in [\![0, 4]\!],\ \frac{x+i}{x-i} = e^{\frac{2ik\pi}{5}} \\
&\iff \exists\, k \in [\![1, 4]\!],\ x \left(1 - e^{\frac{2ik\pi}{5}} \right) = -i \left(1 + e^{\frac{2ik\pi}{5}} \right) \\
&\iff \exists\, k \in [\![1, 4]\!],\ x = -i \frac{1 + e^{\frac{2ik\pi}{5}}}{1 - e^{\frac{2ik\pi}{5}}} = i \frac{e^{\frac{-ik\pi}{5}} + e^{\frac{ik\pi}{5}}}{e^{\frac{ik\pi}{5}} - e^{\frac{-ik\pi}{5}}} \\
&\iff \exists\, k \in [\![1, 4]\!],\ x = \frac{\cos\left(\frac{k\pi}{5}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{5}\right)} = \mathrm{cotan}\left(\frac{k\pi}{5} \right)
\end{aligned}$$