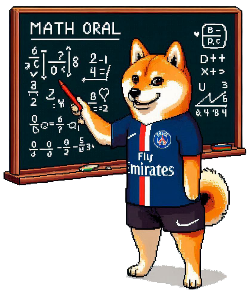
Mathématiques PT. 2025 - 2026

Mathématiques & Informatique - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
Lycée Voltaire, Paris 11e.



Préparation à l'oral

Math - Analyse
Semaine du 26 Mai

Sujet OB-AN-1

On considère, pour $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale
$$I_n = \int_0^{+\infty} \left((1+x)^n - 1\right) e^{-x} \mathrm{d}x.$$

1. Montrer la convergence de I_n.

2. Établir une relation de récurrence entre I_n et I_{n-1}, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3. Exprimer, pour $n \in \mathbb{N}$, I_n sous forme d'une somme.

4. Montrer que
$$\forall x \in]-1,1[, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{I_n x^n}{n!} = \frac{xe^x}{1-x}.$$

Solution du sujet OB-AN-1 : Math II 2024

1. La fonction $x \mapsto ((1+x)^n - 1)e^{-x}$ est continue sur $[0, +\infty[$: l'intégrale est seulement impropre en $+\infty$. Par croissance comparée,
$$x^2((1+x)^n - 1)e^{-x} \sim x^{n+2}e^{-x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$
donc $((1+x)^n - 1)e^{-x} = o(1/x^2)$ et comme $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ converge, le critère de comparaison pour des fonctions positives (et c'est bien le cas ici) assure que l'intégrale converge.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On procède par IPP ; par croissance comparée le crochet est convergent donc celle-ci est licite sur les intégrales généralisées.
$$\begin{aligned} I_n &= \left[-((1+x)^n - 1)e^{-x}\right]_0^{+\infty} + n\int_0^{+\infty} (1+x)^{n-1}e^{-x}\mathrm{d}x \\ &= n\int_0^{+\infty} (1+x)^{n-1}e^{-x}\mathrm{d}x = n\int_0^{+\infty} ((1+x)^{n-1} - 1)e^{-x}\mathrm{d}x + n\int_0^{+\infty} e^{-x}\mathrm{d}x \\ &= nI_{n-1} + n. \end{aligned}$$

3. On reconnait une formule du binôme. La permutation somme/intégrale qui suit est licite car c'est une somme finie et toutes les intégrales sont convergentes (elles ne sont impropres qu'en $+\infty$ et on les compare à du Riemann convergent par croissance comparée). On sait aussi (où utilise un résultat classique à savoir redémontrer par IPP et récurrence, disant que $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^k e^{-x}\mathrm{d}x = k!$).
$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{+\infty} \left[\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} x^k\right] e^{-x}\mathrm{d}x \\ &= \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \int_0^{+\infty} x^k e^{-x}\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} k! \\ &= n!\sum_{k=1}^n \frac{1}{(n-k)!} \end{aligned}$$
Autre méthode. Si on se fie à la question précédente, on a plutot envie d'écrire que
$$\frac{I_n}{n!} = \frac{I_{n-1}}{(n-1)!} + \frac{1}{(n-1)!}$$
puis de sommer pour faire apparaitre un télescopage, comme $I_0 = 0$,
$$I_n = n!\sum_{k=1}^n \left(\frac{I_k}{k!} - \frac{I_{k-1}}{(k-1)!}\right) = n!\sum_{k=1}^n \frac{1}{(k-1)!} = n!\sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{j!} = n!\sum_{k=1}^n \frac{1}{(n-k)!}$$

4. On reconnait un produit de Cauchy de deux séries entières de rayon de convergence $R = 1$ et $R = +\infty$. Ainsi, pour tout $x \in]-1, 1[$, on a :
$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{I_n x^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left[\sum_{k=1}^n \frac{1}{(n-k)!}\right] x^n \\ &= \left(\sum_{n=1}^{+\infty} x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}\right) \\ &= \frac{xe^x}{1-x}. \end{aligned}$$