



## Préparation à l'oral

*Math - Analyse*  
*Semaine du 26 Mai*

---

### Sujet OB-AN-2

Soit  $C = [-1, 1]^2$  et  $f$  la fonction définie sur  $C$  par  $f(x, y) = \ln(1 + 2x^2 + 2y^2) + x + y$ .

1. Justifier que  $f$  admet un minimum et un maximum sur  $C$ .
2. Étudier les extremums locaux de  $f$  sur  $] - 1, 1[$ .
3. Étudier les extremums de  $f$  sur le bord de  $C$ .
4. En déduire le minimum et le maximum de  $f$  sur  $C$ .

## Solution du sujet OB-AN-2 : Math II 2022

- La fonction  $f$  est continue (et même  $C^1$ ) en tant que composée, somme et produit de fonctions continues. De plus  $C$  est fermé et borné, donc par le théorème des bornes atteintes  $f$  admet un minimum et un maximum sur  $C$ .
- Sur un ouvert, un extremum ne peut être atteint qu'en un point critique. On commence donc par déterminer les points critiques de  $f$ . On a :

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y) = \vec{0} &\iff \begin{cases} \frac{4x}{1+2x^2+2y^2} + 1 = 0 \\ \frac{4y}{1+2x^2+2y^2} + 1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{4x}{1+2x^2+2y^2} + 1 = 0 \\ \frac{4(y-x)}{1+2x^2+2y^2} = 0 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ &\iff \begin{cases} \frac{4x}{1+4x^2} + 1 = 0 \\ y = x \end{cases} \iff \begin{cases} 4x + 1 + 4x^2 = 0 \\ y = x \end{cases} \iff \begin{cases} (2x+1)^2 = 0 \\ y = x \end{cases} \iff x = y = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

On a donc un unique point critique. Pour déterminer sa nature, on tente d'utiliser la matrice Hessienne.

On a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{4(1-2x^2+2y^2)}{(1+2x^2+2y^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \frac{4(1+2x^2-2y^2)}{(1+2x^2+2y^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{-4x4y}{(1+2x^2+2y^2)^2}.$$

On en déduit les coefficients de la matrice Hessienne :

$$H\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

qui admet 0 pour valeur propre... ce qui ne permet donc pas de conclure. On doit alors regarder «à la main» ce qui se passe en estimant le signe, au voisinage de  $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$  de

$$h(x, y) = f(x, y) - f\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \ln\left(\frac{1}{2} + x^2 + y^2\right) + x + y + 1.$$

On va regarder la fonction  $\varphi : x \mapsto h(x, x)$  et montrer qu'elle est croissante. Comme  $\varphi(-1/2) = 0$ , il y aura des valeurs négatives avant  $-1/2$  et positives après et donc  $h$  change de signe arbitrairement proche du point critique. Pour  $x$  au voisinage de  $-1/2$ ,

$$\varphi(x) = \ln\left(\frac{1}{2} + 2x^2\right) + 2x + 1, \quad \varphi'(x) = \frac{4x}{1/2 + 2x^2} + 2 = \frac{4x^2 + 4x + 1}{1/2 + 2x^2} = \frac{4(x+1/2)^2}{1/2 + 2x^2} \geq 0$$

ce qui donne ce qu'on voulait.

En conclusion,  $f$  présente un point selle en son unique point critique à l'intérieur de  $C$ . Comme  $f$  n'admet aucun extremum à l'intérieur de  $C$ , ses extremums sur  $C$  seront atteints sur le bord.

- $C$  est le carré centré en l'origine et de côté 2. Son bord se décompose donc en 4 segments, correspondants aux équations  $x = -1, x = 1, y = -1, y = 1$  (avec toujours  $x, y \in [-1, 1]$ ). On doit donc distinguer ces 4 cas.

✕ Si  $y = 1$  on a  $f(x, 1) = \ln(3 + 2x^2) + x + 1$  qui est une fonction strictement croissante (par composition). Donc son minimum est  $f(-1, 1) = \ln(5)$  et son maximum est  $f(1, 1) = \ln(5) + 2$ .

✕ Si  $y = -1$  on a  $f(x, -1) = \ln(3 + 2x^2) + x - 1$  qui est une fonction strictement croissante (par composition). Donc son minimum est  $f(-1, -1) = \ln(5) - 2$  et son maximum est  $f(1, -1) = \ln(5)$ .

✕ Si  $x = 1$ , on a on a  $f(1, y) = f(y, 1)$  par symétrie, donc le minimum est  $f(-1, 1) = \ln(5)$  et le maximum est  $f(1, 1) = \ln(5) + 2$ .

✕ Si  $x = -1$ , on a on a  $f(-1, y) = f(y, -1)$  par symétrie, donc le minimum est  $f(-1, -1) = \ln(5) - 2$  et le maximum est  $f(1, -1) = \ln(5)$ .

Bilan : le max de  $f$  sur le bord de  $C$  vaut  $\ln(5) + 2$ , il est atteint en  $(1, 1)$ , le min est  $\ln(5) - 2$  et est atteint en  $(-1, -1)$ .

- Le maximum de  $f$  sur (le bord de)  $C$  est donc  $f(1, 1) = \ln(5) + 2$  et le minimum de  $f$  sur le bord de  $C$  est donc  $f(-1, -1) = \ln(5) - 2$ .