



Préparation à l'oral

Math - Analyse
Semaine du 26 Mai

Sujet OB-AN-3

Pour tout $x \in]0, +\infty[$, on pose

$$F(x) = - \int_x^{+\infty} \frac{\arctan(t)}{t^2} dt.$$

- Montrer la convergence de l'intégrale définissant F .
 - Montrer que F est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$ et donner une expression de sa dérivée.

- On considère l'équation différentielle

$$xy' - y = \arctan x \quad (E)$$

Exprimer les solutions de (E) sur \mathbb{R}_+^* à l'aide de F .

- On pose

$$G(X) = \frac{1}{X(X^2 + 1)}.$$

- Donner la décomposition en éléments simples de $G(X)$ sur \mathbb{C} .
- Trouver α, β, γ tels que

$$G(X) = \frac{\alpha}{X} + \frac{\beta + \gamma X}{X^2 + 1}$$

- En déduire une expression de F à l'aide de fonctions usuelles puis les solutions de (E) sur \mathbb{R}_+^* à l'aide de telles fonctions.

Solution du sujet OB-AN-3 : Math II 2025

1. a. Pour $x > 0$ fixé, la fonction $t \mapsto \frac{\arctan(t)}{t^2}$ est continue sur $[x, +\infty[$; l'intégrale est seulement impropre en $+\infty$.

Comme, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\arctan(x)| \leq \frac{\pi}{2}$, on a : $\left| \frac{\arctan(t)}{t^2} \right| = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et l'intégrale de Riemann $\int_x^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge. Par critère de comparaison, l'intégrale est bien convergente.

- b. La fonction $h : t \mapsto \frac{\arctan(t)}{t^2}$ est continue sur \mathbb{R}_+^* . Elle y admet donc, par théorème fondamental de l'analyse, des primitives. Notons H celle qui s'annule en 1 (qui est donc de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* car sa dérivée vaut h et est continue). Par Chasles, on a, pour tout $x > 0$,

$$F(x) = H(x) - F(1)$$

et donc F est bien de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* et vérifie : $\forall x > 0, F'(x) = \frac{\arctan(x)}{x^2}$.

2. On normalise l'EDL.

$$(E) \iff y' - \frac{1}{x}y = \frac{\arctan(x)}{x}.$$

Les solutions de l'équation homogène sont de la forme $y : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \lambda x$ où $\lambda \in \mathbb{R}$. Une méthode de variation de la constante permet de trouver une solution particulière de (E) . On cherche y_p de la forme $y_p : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \lambda(x)x$, où λ de classe \mathcal{C}^1 est à déterminer. En injectant dans (E) , il vient

$$\forall x > 0, \quad \lambda'(x) = \frac{\arctan(x)}{x^2} \implies \lambda(x) = F(x) + \kappa,$$

où κ est une constante. On peut choisir $\kappa = 0$. Par superposition, les solutions de (E) sont de la forme

$$y : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto (\lambda + F(x))x, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

3. a. Sur \mathbb{C} , on peut factoriser $X^2 + 1 = (X - i)(X + i)$ et donc la D E S de $G(X)$ s'écrit

$$G(X) = \frac{a}{X} + \frac{b}{X+i} + \frac{c}{X-i} \iff \begin{cases} a+b+c = 0 \\ -ib+ic = 0 \\ a = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ b = -1/2 \\ c = -1/2 \end{cases}$$

Ainsi, $G(X) = \frac{1}{X} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{X+i} + \frac{1}{X-i} \right)$.

- b. En reprenant l'expression précédente, on trouve immédiatement

$$G(X) = \frac{1}{X} - \frac{X}{X^2+1}.$$

- c. On fait une IPP généralisée. En posant

$$\begin{cases} u(t) = \arctan(t) \\ v'(t) = \frac{1}{t^2} \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} u'(t) = \frac{1}{1+t^2} \\ v(t) = -\frac{1}{t} \end{cases}$$

les fonctions u, v sont de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* . Le crochet $[u(t)v(t)]_x^\infty$ est convergent donc la formule s'applique.

$$\begin{aligned} F(x) &= \left[-\frac{\arctan(t)}{t} \right]_x^\infty + \int_x^\infty \frac{dt}{t(1+t^2)} \\ &= \frac{\arctan(x)}{x} + \int_x^\infty \left(\frac{1}{t} - \frac{t}{t^2+1} \right) dt \\ &= \frac{\arctan(x)}{x} + \left[\ln(t) - \frac{1}{2} \ln(t^2+1) \right]_x^\infty = \frac{\arctan(x)}{x} + \frac{1}{2} [\ln(t^2) - \ln(t^2+1)]_x^\infty \\ &= \frac{\arctan(x)}{x} + \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right). \end{aligned}$$

En reprenant le résultat de la Question 2., on a que l'ensemble des solutions des (E) est donné par

$$y : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \lambda x + \arctan(x) + x \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$