



Préparation à l'oral

Math - Analyse
Semaine du 26 Mai

Sujet OB-AN-4

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$u_n = \frac{1}{\sum_{k=1}^n k^2}.$$

1. Montrer que la série de terme général u_n est convergente.

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (H_{2n+1} - H_n) = \ln(2).$$

3. Déterminer des réels a, b, c tels que l'on ait, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{n(n+1)(2n+1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{2n+1}.$$

4. En déduire le calcul de la somme

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n.$$

Solution du sujet OB-AN-4 : Math II 2025

1. Pour tout $n \geq 1$, $\sum_{k=1}^n k^2 \geq n^2$ et donc $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n^2}$. La série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente. Par critère de comparaison pour les séries à termes positifs, on peut affirmer que la série $\sum u_n$ converge.

2. Il suffit de penser à utiliser les sommes de Riemann à pas constant ! Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$H_{2n+1} - H_n = \sum_{i=n+1}^{2n+1} \frac{1}{i} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{dt}{1+t} = \ln(2).$$

3. Simple identification.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n(n+1)(2n+1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{2n+1} \iff \begin{cases} 2a + 2b + c = 0 \\ 3a + b + c = 0 \\ a = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = -4 \end{cases}$$

ou encore

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n(n+1)(2n+1)} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \frac{4}{2n+1}.$$

4. On sait depuis le début de la première année que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, de sorte que

$$u_n = 6 \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \frac{4}{2n+1} \right).$$

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On calcule la somme partielle

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N u_n &= 6 \left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} + \sum_{n=1}^N \frac{1}{n+1} - 4 \sum_{n=1}^N \frac{1}{2n+1} \right) \\ &= 6 \left(H_N + H_{N+1} - 1 - 4 \sum_{n=1}^{2N+1} \frac{1}{n} + 4 \sum_{n=1}^N \frac{1}{2n} \right) \\ &= 6 \left(H_N + H_{N+1} - 1 - 4H_{2N+1} - 4 + 2H_N \right) = 6 \left(3 + 4(H_N - H_{2N+1}) + \frac{1}{N+1} \right) \\ &\xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 18 - 24 \ln(2). \end{aligned}$$