



Préparation à l'oral

Math - Analyse
Semaine du 26 Mai

Sujet OB-AN-5

On pose $I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t^2} dt$ et $F(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} (t-x)^2 (t-y)^2 e^{-t^2} dt$.

1. Montrer que l'intégrale I_n converge et exprimer I_{n+2} en fonction de I_n .
2. Calculer I_{2p+1} et I_{2p} pour tout $p \geq 0$.
3. Calculer $F(x, y)$. En déduire que F est \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}^2 .
4. Trouver les points critiques de F et trouver leur nature.

Solution du sujet OB-AN-5 : Math II 2023

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. $f_n : t \mapsto t^n e^{-t^2}$ est continue sur \mathbb{R} , comme produit de fonctions qui le sont.

Par croissance comparée,

$$t^2 f_n(t) = t^{n+2} e^{-t^2} \xrightarrow{t \rightarrow \pm\infty} 0$$

donc $f_n(t) \underset{\pm\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$. $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable en $+\infty$ (car $2 > 1$) et en $-\infty$ (par le changement de variable $u = -t$).

Par comparaison, f_n est intégrable en $+\infty$ et en $-\infty$. Donc $I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t^2} dt$ converge.

On pose $u(t) = t^{n+1}$ et $v(t) = -\frac{1}{2}e^{-t^2}$, de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} . Par intégration par parties, on a :

$$I_{n+2} = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t)v'(t)dt = \underbrace{\left[-\frac{t^{n+1}}{2}e^{-t^2}\right]_{-\infty}^{+\infty}}_{=0} + \frac{n+1}{2} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t^2} dt}_{=I_n}$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_{n+2} = \frac{n+1}{2}I_n$.

2. $I_0 = \sqrt{\pi}$ et $I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} te^{-t^2} dt = \left[-\frac{1}{2}e^{-t^2}\right]_{-\infty}^{+\infty} = 0$.

Si $I_{2p+1} = 0$ et $I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}p!}\sqrt{\pi}$ à un rang $p \in \mathbb{N}$, alors on a :

$$I_{2p+3} = \frac{2p+2}{2}I_{2p+1} = 0 \text{ et } I_{2p+2} = \frac{2p+1}{2}I_{2p} = \frac{(2p+2)(2p+1)}{2^2(p+1)} \frac{(2p)!}{2^{2p}p!}\sqrt{\pi} = \frac{(2p+2)!}{2^{2p+2}(p+1)!}\sqrt{\pi}$$

Par récurrence, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $I_{2p+1} = 0$ et $I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}p!}\sqrt{\pi}$.

3. Par linéarité de l'intégrale en cas de convergence, on a :

$$F(x, y) = I_4 + (x^2 + y^2 + 4xy)I_2 + x^2y^2I_0 = \frac{3\sqrt{\pi}}{4} + \frac{\sqrt{\pi}}{2}(x^2 + y^2 + 4xy) + \sqrt{\pi}x^2y^2$$

Ainsi, F est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}^2 (ouvert), comme fonction polynomiale.

4. (x, y) est un point critique de F ssi $\nabla F(x, y) = (0, 0)$ ssi

$$\begin{aligned} \begin{cases} \sqrt{\pi}(x + 2y + 2xy^2) = 0 \\ \sqrt{\pi}(y + 2x + 2x^2y) = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} L_2 + xL_2 - yL_1 \\ y = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x \neq 0 \\ x + 2y(1 + xy) = 0 \\ 2(x^2 - y^2)(1 + xy) = 0 \end{cases} \\ \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x \neq 0 \\ x + 2y(1 + xy) = 0 \\ y^2 = x^2 \end{cases} &\iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x \neq 0 \\ x^2 = -\frac{3}{2} \\ y = x \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x \neq 0 \\ x^2 = \frac{1}{2} \\ y = -x \end{cases} \end{aligned}$$

Donc les points critiques de F sont : $O(0, 0)$, $A\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ et $B\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. $H_1 = H_F(O) = \begin{pmatrix} \sqrt{\pi} & 2\sqrt{\pi} \\ 2\sqrt{\pi} & \sqrt{\pi} \end{pmatrix}$ et

$$H_2 = H_F(A) = H_F(B) = \begin{pmatrix} 2\sqrt{\pi} & 0 \\ 0 & 2\sqrt{\pi} \end{pmatrix}.$$

$\det(H_1) < 0$ donc F admet un point col en O , de valeur $F(0, 0) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}$.

$\det(H_2) > 0$ et $\text{tr}(H_2) > 0$ donc F admet un minimum local en A et B , de valeur $F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = F\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.