



## Préparation à l'oral

*Math - Analyse*  
*Semaine du 26 Mai*

### Sujet OB-AN-6

1. Redémontrer que l'intégrale de Gauss  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt$  est convergente.

2. Montrer que la fonction  $F : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(xt)e^{-t^2} dt$  est définie sur  $\mathbb{R}$ .

3. Montrer que  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  et que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F' : x \mapsto -\frac{x}{2}F(x).$$

4. En déduire une forme plus simple de  $F$  sans intégrale.

5. Pour  $x \in \mathbb{R}$ , pose

$$G(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(xt)e^{-t^2} dt.$$

Montrer l'existence de cette fonction et en donner une expression plus simple.

## Solution du sujet OB-AN-6 : Math II 2025

- La fonction  $t \mapsto e^{-t^2}$  est continue sur  $\mathbb{R}$  et paire. Il suffit de montrer la convergence de l'intégrale sur  $[1, +\infty[$ . Par croissance comparée,  $e^{-t^2} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ , lorsque  $t \rightarrow +\infty$ . Or l'intégrale de Riemann  $\int_1^\infty \frac{dt}{t^2}$  est une intégrale convergente de référence, ce qui permet de conclure.
- Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\left|\cos(xt)e^{-t^2}\right| \leq e^{-t^2}$ . Par comparaison à l'intégrale convergente de la question précédente, on a  $t \mapsto \cos(xt)e^{-t^2}$  intégrable sur  $\mathbb{R}$  et  $F$  est bien définie.
- On applique le **Théorème de dérivation des intégrales à paramètre**. Posons  $f : (x, t) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \cos(xt)e^{-t^2}$ .

✕ Pour tout  $t \in \mathbb{R}$  fixé, la fonction  $x \mapsto f(x, t)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = -t \sin(xt)e^{-t^2}.$$

✕ Pour tout  $x \in \mathbb{R}$  fixé, la fonction  $t \mapsto f(x, t)$  est intégrable sur  $\mathbb{R}$  comme montré en Question 2.

✕ Pour tout  $x \in \mathbb{R}$  fixé, la fonction  $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$  est continue sur  $\mathbb{R}$  ;

✕ Soit  $(x, t) \in \mathbb{R}^2$ . On a

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x, t)\right| \leq te^{-t^2} =: \varphi(t)$$

La fonction  $t \mapsto \varphi(t)$  est indépendante de  $x$  et intégrable sur  $\mathbb{R}$  (avec exactement le même argument que dans la Question 1., sauf que cette fois la fonction est impaire).

L'hypothèse de domination est donc satisfaite.

La fonction  $F$  est bien de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  et, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a

$$F'(x) = - \int_{-\infty}^{+\infty} t \sin(xt)e^{-t^2} dt,$$

ce qui n'est pas encore la formule attendue. Mais qu'à cela ne tienne, on continue le travail avec une... IPP bien entendu. Posons

$$\begin{cases} u'(t) = -te^{-t^2} \\ v(t) = \sin(xt) \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} u(t) = \frac{1}{2}e^{-t^2} \\ v'(t) = x \cos(xt) \end{cases}$$

Les fonctions  $u, v$  sont bien de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ . Le crochet  $[u(t)v(t)]_{-\infty}^{+\infty}$  est convergent et vaut 0 car

$$\left|\frac{\sin(xt)}{2}e^{-t^2}\right| \leq \frac{e^{-t^2}}{2} \xrightarrow{t \rightarrow \pm\infty} 0.$$

La formule d'IPP généralisée est donc licite et permet d'écrire

$$F'(x) = - \int_{-\infty}^{+\infty} t \sin(xt)e^{-t^2} dt = - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cos(xt)}{2} e^{-t^2} dt = -\frac{x}{2}F(x).$$

- Il suffit de résoudre l'équa-diff

$$y' + \frac{x}{2}y = 0$$

dont les solutions sont de la forme  $y : x \mapsto \lambda e^{-\frac{x^2}{4}}$ , avec  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Or,  $\lambda = F(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$ . (La dernière égalité n'est pas exigible et on peut garder la constante sous forme intégrale pour fournir une réponse complètement acceptable et attendue).

Au final

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \sqrt{\pi}e^{-\frac{x^2}{4}}.$$

- Le même argument qu'en Question 2. permet de justifier de la bonne définition de  $G$ . On observe alors que la fonction  $t \mapsto \sin(xt)e^{-t^2}$  est impaire. En cas de convergence sur  $\mathbb{R}$ , son intégrale est nulle. On a donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(xt)e^{-t^2} dt = 0.$$

**Remarque (HP).** Il découle des calculs précédents que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt}e^{-t^2} dt = F(x) + iG(x) = F(x) = \sqrt{\pi}e^{-\frac{x^2}{4}},$$

ce qui permet de voir (moyennant une normalisation) que la gaussienne est point fixe de la transformée de Fourier !