



## Préparation à l'oral

*Math - Analyse*  
*Semaine du 26 Mai*

### Sujet OB-AN-7

On pose  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$ , avec  $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}(t) dt$ .

1. Établir la relation  $2(n+1)u_{n+1} = (2n+1)u_n$ .
2. Trouver le rayon de convergence de  $\sum u_n x^n$ .
3. Montrer que  $f$  est solution de  $2(1-x)y' - y = 0$ .
4. En déduire  $f(x)$  et  $u_n$ .

## Solution du sujet OB-AN-7 : Math II 2022

1. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On a :

$$u_{n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t) \cos^{2n}(t) dt = \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}(t) dt}_{=u_n} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t) \cos^{2n}(t) dt.$$

On pose  $u'(t) = \sin(t) \cos^{2n}(t)$ ,  $v(t) = \sin(t)$ ,  $u(t) = -\frac{\cos^{2n+1}(t)}{2n+1}$ ,  $v'(t) = \cos(t)$ .  $u, v \in \mathcal{C}^1([0, \frac{\pi}{2}])$ , donc, par intégration par parties et linéarité, on a :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t) \cos^{2n}(t) dt = \underbrace{\left[ -\sin(t) \frac{\cos^{2n+1}(t)}{2n+1} \right]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0} + \frac{1}{2n+1} \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+2}(t) dt}_{=u_{n+1}}.$$

Donc  $u_{n+1} = u_n - \frac{1}{2n+1}u_{n+1}$  et donc  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $(2n+2)u_{n+1} = (2n+1)u_n$ .

2. On pose  $a_n = u_n x^n$ . Pour  $x \neq 0$ , on a :  $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{2n+1}{2n+2} |x| \underset{+\infty}{\sim} |x|$ .

Par la règle de d'Alembert, si  $|x| < 1$  alors  $\sum u_n x^n$  est absolument convergente, et si  $|x| > 1$  alors  $\sum u_n x^n$  est divergente. Donc le rayon de convergence de  $\sum u_n x^n$  est  $RC = 1$ .

3. Ainsi,  $f$  est  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $] -1, 1 [$  et, par dérivation terme à terme, on a :

$$\begin{aligned} \forall x \in ] -1, 1 [, \quad f'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} n u_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) u_{n+1} x^n \quad \text{et} \\ 2(1-x)f'(x) - f(x) &= 2 \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) u_{n+1} x^n - 2x \sum_{n=1}^{+\infty} n u_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{[2(n+1)u_{n+1} - (2n+1)u_n]}_{=0} x^n = 0. \end{aligned}$$

Donc  $f$  est solution de  $(E) : 2(1-x)y' - y = 0$ .

4. Sur  $] -1, 1 [, 1-x > 0$  et  $(E) \iff y' - \frac{1}{2(1-x)}y = 0$ , équation linéaire homogène d'ordre 1 dont la solution générale s'écrit :

$$y(x) = C e^{-\frac{1}{2} \ln(1-x)} = C(1-x)^{-\frac{1}{2}}, \text{ avec } C \in \mathbb{R}$$

De plus,  $f(0) = u_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dx = \frac{\pi}{2}$  et  $y(0) = \frac{\pi}{2} \iff C = \frac{\pi}{2}$ .

Donc  $\forall x \in ] -1, 1 [, f(x) = \frac{\pi}{2} (1-x)^{-\frac{1}{2}}$ . D'après le cours, comme  $-\frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$ ,  $(1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)\dots(-\frac{1}{2}-n+1)}{n!} x^n$ , de rayon de convergence  $R = 1$ . Si  $x \in ] -1, 1 [, -x \in ] -1, 1 [$  et on a :

$$f(x) = \frac{\pi}{2} \left[ 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \frac{1}{2} \frac{3}{2} \dots \frac{2n-1}{2}}{n!} (-x)^n \right] = \frac{\pi}{2} \left[ 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(2^n)^2 n!} x^n \right] = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\pi(2n)!}{2(2^n n!)^2} x^n.$$

Par unicité des coefficients d'une série entière (du DSE de  $f$ ),  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = \frac{\pi(2n)!}{2(2^n n!)^2}$ .