



Préparation à l'oral

Math - Barbara Courcambeck
Mercredi 17 Juin

Sujet OB-BC-1

Exercice 1

$$\text{Soit } \Gamma : \begin{cases} x(t) = \sqrt{3} \sin(t) + \cos(t) \\ y(t) = 2 \cos(t) - 1 \\ z(t) = \cos(t) - \sqrt{3} \sin(t) + 5 \end{cases}$$

1. Montrer que Γ est plane.
2. Montrer que Γ est incluse dans une sphère de centre $\Omega(2, -3, 7)$ et donner son rayon.
3. Identifier Γ .

Exercice 2

Soit A une matrice d'ordre $n \geq 1$ et de rang 1.

1. Déterminer son polynôme caractéristique.
2. Déterminer si A est diagonalisable.

Solution du sujet OB-BC-1 : IMT 2025

Exercice 1

1. Soit $M(t)$ un point de Γ .

x Méthode 1. Notons A le point de coordonnées $(0, 1, -5)$.

$$\overrightarrow{AM(t)} = \cos(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \sin(t) \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 0 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix},$$

ce qui montre que $M(t)$ appartient au plan \mathcal{P} passant par A et dirigé par $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 0 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$: la courbe est plane.

x Méthode 2. On peut assez facilement voir que si $M(x, y, z) \in \Gamma$, alors $x + z = 2 \cos(t) + 5 = y + 6$, donc Γ est incluse dans le plan d'équation

$$x - y + z = 6.$$

2. On calcule la distance d'un point de la courbe au centre Ω . On a

$$\begin{aligned} \|\vec{\Omega M(t)}\|^2 &= (\sqrt{3} \sin(t) + \cos(t) - 2)^2 + (2 \cos(t) - 1 + 3)^2 + (\cos(t) - \sqrt{3} \sin(t) + 5 - 7)^2 \\ &= 3 \sin^2(t) + \cos^2(t) + 4 - 4\sqrt{3} \sin(t) - 4 \cos(t) + 2\sqrt{3} \sin(t) \cos(t) \\ &\quad + 4 \cos^2(t) + 4 + 8 \cos(t) + \cos^2(t) + 3 \sin^2(t) + 4 - 4 \cos(t) + 4\sqrt{3} \sin(t) - 2\sqrt{3} \cos(t) \sin(t) \\ &= 18 \end{aligned}$$

On a bien le résultat attendu, le rayon de la sphère \mathcal{S} de centre Ω est $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.

3. La courbe est plane et incluse dans une sphère, elle est donc incluse dans l'intersection du plan et de cette sphère qui est soit vide, soit réduite à un point, soit définit un cercle. Si c'est un cercle, son centre est la projection orthogonale de Ω sur \mathcal{P} . La courbe n'est ni vide, ni réduite à un point, l'intersection précédente est donc nécessairement un cercle.

Soit donc H la projection orthogonale de Ω sur \mathcal{P} , comme \mathcal{P} a pour vecteur normal $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, on a :

$$\begin{aligned} H(x, y, z) \text{ projeté orthogonal de } \Omega \text{ sur } \mathcal{P} &\iff \begin{cases} \exists \lambda \in \mathbb{R}, \overrightarrow{\Omega H} = \lambda \vec{n} \\ H \in \mathcal{P} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -3 - \lambda \\ z = 7 + \lambda \\ x - y + z = 6 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = -2 \\ x = 0 \\ y = 1 \\ z = -5 \end{cases} \end{aligned}$$

et H n'est autre que le point A ! Notons \vec{u}_0 et \vec{v}_0 les vecteurs $\frac{1}{\sqrt{6}}\vec{u}$ et $\frac{1}{\sqrt{6}}\vec{v}$ normalisés.

On se place dans le plan \mathcal{P} dont on prend pour repère $\mathcal{R}_0 = (A, \vec{u}_0, \vec{v}_0)$. Il découle de ce qui précède à la Question 1 (et il faut orienter le candidat vers la méthode correspondante s'il a choisi l'autre dans la résolution de celle-ci) que les coordonnées $(X(t), Y(t))$ de $M(t)$ dans \mathcal{R}_0 sont

$$\begin{cases} X(t) = \sqrt{6} \cos(t) \\ Y(t) = \sqrt{6} \sin(t) \end{cases},$$

et on reconnaît le paramétrage d'un cercle de centre l'origine du repère (donc A) et de rayon 6.

Exercice 2

1. Considérons l'endomorphisme f de \mathbb{R}^n canoniquement associé à A . La matrice A étant de rang 1, le noyau de f est de dimension $n - 1$ par théorème du rang. On note alors (u_1, \dots, u_{n-1}) une base de celui-ci qu'on complète en une base (u_1, \dots, u_{n-1}, v) de \mathbb{R}^n . Dans cette base, la matrice de f est de la forme

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & x_1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & x_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & x_n \end{pmatrix},$$

où les x_i sont non tous nuls car B est de rang 1. Observons que la trace est invariante par changement de base et donc $x_n = \text{Tr}(B) = \text{Tr}(A)$.

Le polynôme caractéristique de A est le même que celui de B (et de f ; il est invariant par changement de base) et est égal à

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^{n-1} (\lambda - \text{Tr}(A)).$$

2. On distingue deux cas :

- ✗ Si $\text{Tr}(A) = 0$, alors A a pour unique valeur propre 0. Elle n'est pas identiquement nulle et ne peut donc pas être diagonalisable (refaire la preuve de cette assertion par l'absurde).
- ✗ Si $\text{Tr}(A) \neq 0$, alors $\text{Tr}(A)$ est valeur propre de A , nécessairement de multiplicité (géométrique) 1 car 0 est de multiplicité $n - 1$. Le polynôme caractéristique est scindé et les multiplicités algébriques correspondent aux multiplicités géométriques, A est donc diagonalisable.

Remarque. On entend par multiplicité algébrique la multiplicité de la valeur propre en tant que racine du polynôme caractéristique et multiplicité algébrique la dimension du sous-espace propre associé. Cette terminologie n'est pas officiellement au programme mais permet de bien différencier les deux et de retenir le critère.