



Préparation à l'oral

Math - Barbara Courcambeck
Mercredi 17 Juin

Sujet OB-BC-2

Exercice 1

Soient E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$, $\ell : E \rightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire non nulle sur E et $a \in E \setminus \{0\}$. On définit :

$$f : x \mapsto \ell(x)a - \ell(a)x.$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de E et calculer $f(a)$.
2. Déterminer les éléments propres de f .

Exercice 2

Soit $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbf{P}(X \leq n) = \frac{1}{n!} \int_{\lambda}^{+\infty} e^{-x} x^n dx.$$

2. Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(X \leq n) = 1.$$

3. Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n!} \int_0^{\lambda} e^{-x} x^n dx = 0.$$

Solution du sujet OB-BC-2 : IMT 2025

Exercice 1

1. Montrons que f est linéaire. Soient $x, y \in E$ et α, β deux réels. Par linéarité de ℓ , on a

$$f(\alpha x + \beta y) = \ell(\alpha x + \beta y)a - \ell(a)(\alpha x + \beta y) = (\alpha\ell(x) + \beta\ell(y))a - \alpha\ell(a)x - \beta\ell(a)y = \alpha f(x) + \beta f(y),$$

et on a le résultat attendu. Il reste à vérifier que f est à valeurs dans E mais c'est clair : $\ell(x) \in \mathbb{R}$ et $\ell(a) \in \mathbb{R}$ et E est un espace vectoriel, on peut calculer la combinaison linéaire de x et de a , qui est encore un vecteur de E .

2. Commençons par observer que $f(a) = 0$ et donc 0 est valeur propre avec $\text{Vect}(a) \subset E_0(f)$.

On distingue deux cas :

- ✕ Si $a \in \text{Ker}(\ell)$. Alors $x \in E_0(f) = \text{Ker}(f) \iff \ell(x)a = \ell(a)x = 0 \iff \ell(x) = 0 \iff x \in \text{Ker}(\ell)$. Dans ce cas $E_0(f) = \text{Ker}(\ell)$ est un hyperplan.
- ✕ Si $a \notin \text{Ker}(\ell)$. Alors $x \in E_0(f) = \text{Ker}(f) \iff \ell(x)a = \ell(a)x \iff x = \frac{\ell(x)}{\ell(a)}a \implies x \in \text{Vect}(a)$ et dans ce cas $E_0(f) = \text{Vect}(a)$.

Soit ensuite $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Si $x \in E$ est non nul tel que $f(x) = \lambda x$. Alors, $\ell(x)a - \ell(a)x = \lambda x$ et donc $x(\ell(a) + \lambda) = \ell(x)a$.

On se place dans les deux mêmes cas que précédemment :

- ✕ Si $a \in \text{Ker}(\ell)$. Alors $x \in E_\lambda(f) \iff x = \frac{\ell(x)}{\lambda}a \implies x \in \text{Vect}(a) \subset E_0(f)$ donc $\lambda x = f(x) = 0$, ce qui n'est pas possible car $x \neq 0$. Donc il n'y a pas d'autre valeur propre que 0.
- ✕ Si $a \notin \text{Ker}(\ell)$. Si $\lambda \neq -\ell(a)$, alors $x = \frac{\ell(x)}{\ell(a) + \lambda}a \in \text{Vect}(a) = E_0(f)$ donc $f(x) = 0$. Absurde. Donc $\lambda = -\ell(a)$.

Comme $\ell(a) \neq 0$, on a

$$f(x) = -\ell(a)x \iff \ell(x)a = 0 \iff \ell(x) = 0 \iff x \in \text{Ker}(\ell)$$

Ainsi, $-\ell(a)$ est bien valeur propre et $E_{-\ell(a)}(f) = \text{Ker}(\ell)$ qui est un hyperplan.

Dans ce cas, la somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à la dimension de E et f est diagonalisable. (Ce n'est pas explicitement demandé mais on peut le demander.)

Exercice 2

On rappelle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(X = n) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$.

1. Notons $I_n = \int_{\lambda}^{+\infty} e^{-x} x^n dx$. L'étude de ces intégrales est classique. On en justifie la convergence par comparaison à une intégrale de Riemann convergente (en disant bien que $x \mapsto e^{-x} x^n$ est continue sur $[\lambda, +\infty[$ et que, comme $\lambda > 0$, l'intégrale $\int_{\lambda}^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ est convergente puis, $x^n e^{-x} = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$, $x \rightarrow +\infty$ par croissance comparée.

Ensuite, on fait une intégration par parties généralisée (en justifiant bien que les fonctions sur \mathcal{C}^1 et que le crochet est convergent) pour obtenir la relation

$$I_n = \lambda^n e^{-\lambda} + n I_{n-1},$$

de sorte que

$$\frac{I_n}{n!} - \frac{I_{n-1}}{(n-1)!} = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$$

on somme pour faire apparaître un télescopage qui donne

$$\frac{I_n}{n!} - e^{-\lambda} = \sum_{k=1}^n \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

ce qui est bien la formule demandée car $\mathbf{P}(X \leq n) = \sum_{k=0}^n \mathbf{P}(X = k)$.

2. La suite $\left(\sum_{k=0}^n \mathbf{P}(X = k)\right)_{n \geq 0}$ est convergente de limite 1, ce qui donne immédiatement le résultat.

3. Il suffit d'utiliser Chasles et les deux questions précédentes

$$\frac{1}{n!} \int_0^\lambda e^{-x} x^n dx = \frac{1}{n!} \int_0^{+\infty} e^{-x} x^n dx - \frac{1}{n!} \int_\lambda^{+\infty} e^{-x} x^n dx = 1 - \mathbf{P}(X \leq n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

car on sait (ou plutôt on remonte, ne serait-ce qu'oralement en reprenant les détails de la méthode de la Question 1.) que

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} x^n dx = n!$$

(IPP, relation de récurrence...).