



Préparation à l'oral

Math - Barbara Courcambeck
Mercredi 17 Juin

Sujet OB-BC-3

Lors d'une compétition sportive, n athlètes de saut à la perche ont la même probabilité p de réussir. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de participants qui passent la barre.

1. Donner la loi de X , son espérance et sa variance.
2. Les candidats qui ont réussi le premier tour, participent au second tour. On note Y le nombre de candidat qui passent la barre au second tour.
 - a. Donner la loi de Y sachant que k candidats ont passé le premier tour.
 - b. Trouver a tel que $\binom{k}{j} \binom{n}{k} = a \binom{n}{j}$.
 - c. Déterminer la loi de Y .

Solution du sujet OB-BC-3 : Math II 2025

1. On reconnaît un schéma usuel : X renvoie le nombre de succès (l'athlète passe la barre, avec probabilité p) lors de n répétitions identiques et indépendantes (ce que l'on admet raisonnablement même si ce n'est pas explicitement écrit dans l'énoncé) du même schéma de Bernoulli. Ainsi

$$X \sim \mathcal{B}(n, p), \quad \mathbf{E}(X) = np, \quad \mathbf{V}(X) = np(1-p).$$

2. a. Avec un raisonnement analogue, sachant $[X = k]$ réalisé, on a $Y \sim \mathcal{B}(k, p)$.

- b. On écrit explicitement le produit des coefficients binomiaux et on fait apparaître du $n - j$:

$$\binom{k}{j} \binom{n}{k} = \frac{k!}{j!(k-j)!} \times \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{j!(n-j)!} \times \frac{(n-j)!}{(n-k)!(k-j)!} = \binom{n-j}{k-j} \binom{n}{j}$$

car $n - j - (k - j) = n - k$. Le coefficient cherché est $a = \binom{n-j}{k-j}$.

- c. On a la loi conditionnelle, on récupère la loi (marginale) de Y à l'aide de la formule des probabilités totales appliquée au s.c.e $\{[X = k] : k \in \llbracket 0, n \rrbracket\}$. On obtient, pour $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(Y = j) &= \sum_{k=0}^n \mathbf{P}_{[X=k]}(Y = j) \mathbf{P}(X = k) = \sum_{k=j}^n \mathbf{P}_{[X=k]}(Y = j) \mathbf{P}(X = k) \quad \text{car si } j > k, \text{ alors } \mathbf{P}_{[X=k]}(Y = j) = 0 \\ &= \sum_{k=j}^n \binom{k}{j} p^j (1-p)^{k-j} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} \sum_{k=j}^n \binom{n-j}{k-j} p^k \stackrel{\ell=k-j}{=} \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} \sum_{\ell=0}^{n-j} \binom{n-j}{\ell} p^{\ell+j} \\ &= \binom{n}{j} p^{2j} (1-p)^{n-j} \sum_{\ell=0}^{n-j} \binom{n-j}{\ell} p^{\ell} \\ &= \binom{n}{j} p^{2j} (1-p)^{n-j} (1+p)^{n-j} \quad \text{par la formule du binôme} \\ &= \binom{n}{j} (p^2)^j (1-p^2)^{n-j} \end{aligned}$$

et on peut conclure que $Y \sim \mathcal{B}(n, p^2)$.