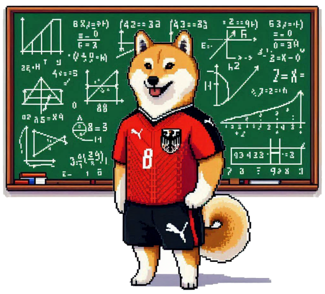
Mathématiques PT. 2025 - 2026

Mathématiques & Informatique - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
Lycée Voltaire, Paris 11e.



Préparation à l'oral

Math - Éléonore Gauci
Mercredi 17 Juin

Sujet OB-EG-1

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et u, v deux endomorphismes de E.

1. Montrer que toute valeur propre non nulle de $u \circ v$ est valeur propre de $v \circ u$.

2. Montrer si E est de dimension finie, alors toute valeur propre de $u \circ v$ est aussi valeur propre de $v \circ u$.

3. On définit les endomorphismes u et v de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ par $u(\mathrm{P}) = \mathrm{XP}$ et $v(\mathrm{P}) = \mathrm{P}'$.

- **a**. Montrer que 0 est valeur propre de $u \circ v$.
- **b**. La valeur 0 est-elle valeur propre de $v \circ u$? Qu'en conclure?

Solution du sujet OB-EG-1 : Math II 2025

1. Soit λ une valeur propre non nulle de $u \circ v$ et $x \neq 0$ un vecteur propre associé à λ. Alors $y = v(x) \neq 0$, sinon $(u \circ v)(x) = u(0) = 0 = \lambda x$, alors que x et λ ne sont pas nuls. En composant l'égalité $(u \circ v)(x) = \lambda x$ par v, on obtient

$$(v \circ u)(y) = \lambda y \quad \text{avec} \quad y = u(x) \neq 0,$$

ce qui signifie que λ est aussi valeur propre de $v \circ u$.

2. D'après ce qui précède toute valeur propre non nulle de $u \circ v$ est aussi valeur propre de $v \circ u$.
Si maintenant zéro est valeur propre de $u \circ v$, alors $g \circ f$ n'est pas bijectif, donc son déterminant est nul (on peut utiliser le déterminant car E est de dimension finie). Ainsi :

$$\det(v \circ u) = \det(v) \times \det(u) = \det(u) \times \det(v) = \det(u \circ v) = 0$$

donc $v \circ u$ n'est pas bijectif, ce qui signifie que zéro est valeur propre de $v \circ u$.

3. **a**. Comme $u \circ v : \mathrm{P} \mapsto \mathrm{XP}'$, zéro est valeur propre car $g(1) = 0$.
b. Comme $v \circ u : \mathrm{P} \mapsto (\mathrm{XP})', v \circ u$ qui est injectif. En effet, si $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ est tel que $v \circ u(\mathrm{P}) = (\mathrm{XP})' = 0$, alors XP est un polynôme constant, ce qui pour une raison de degré impose $P = 0$.
La propriété de la question 2, ne s'étend pas aux espaces de dimension infinie (ce qui est le cas pour $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$).