

Préparation à l'oral

Math - Algèbre
Semaine du 26 Mai

Sujet OB-G-1

On considère les points $A(0, 1)$, $B(2, 0)$, $M(0, y_M)$ et $N(x_N, 0)$, de sorte que $2y_M - 2 = -x_N$.

1. Donner une équation de la droite (MN) en fonction d'un seul paramètre réel.
2. a. Déterminer une équation de l'enveloppe \mathcal{E} des droites (MN) .
b. Quelle est la nature de \mathcal{E} ? Préciser ses éléments géométriques.

Solution du sujet OB-G-1 : Math II 2023

1. On choisit de poser $y_M = t$. Ainsi, on a : $x_N = 2 - 2t$ et

$$P(x, y) \in (MN) \iff [\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{MN}] = 0 \iff \begin{vmatrix} x & 2-2t \\ y-t & -t \end{vmatrix} \iff -tx + (2t-2)y = t(2t-2).$$

Donc, la droite (MN) a pour équation $-tx + (2t-2)y = t(2t-2)$, avec $t \in \mathbb{R}$.

2. a. Soit $\mathcal{D}_t = (MN)$, passant par $M(t) = M(0, t)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(t) = \overrightarrow{MN} = \begin{pmatrix} 2-2t \\ -t \end{pmatrix}$.

Les fonctions $t \mapsto M(t)$ et $t \mapsto \vec{u}(t)$ sont de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et on a :

$$[\vec{u}'(t), \vec{u}(t)] = \begin{vmatrix} -2 & 2-2t \\ -1 & -t \end{vmatrix} = 2t + 2 - 2t = 2 \neq 0.$$

Donc $(\mathcal{D}_t)_{t \in \mathbb{R}}$ admet bien une enveloppe \mathcal{C} , ensemble des points P vérifiant :

$$\exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} P \in \mathcal{D}_t & (*) \\ \mathcal{D}_t \text{ est tangente à } \mathcal{C} \text{ en } P & (**). \end{cases}$$

La condition $(*)$ permet d'obtenir la forme de du paramétrage de \mathcal{C} : s'écrit $P = M(t) + \lambda(t)\vec{u}(t)$, avec $t \mapsto \lambda(t) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ et

$$\frac{d\overrightarrow{OP}}{dt}(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}(t) + \lambda'(t)\vec{u}(t) + \lambda(t)\vec{u}'(t).$$

La condition $(**)$ permet de déterminer λ : si P est régulier : $\left[\frac{d\overrightarrow{OP}}{dt}(t), \vec{u}(t) \right] = 0$ et, par bilinéarité et antisymétrie,

$$\begin{aligned} \left[\frac{d\overrightarrow{OP}}{dt}(t), \vec{u}(t) \right] = 0 &\iff \left[\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}(t), \vec{u}(t) \right] + \lambda(t) [\vec{u}'(t), \vec{u}(t)] = 0 \\ &\iff \lambda(t) = -\frac{\left[\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}(t), \vec{u}(t) \right]}{[\vec{u}'(t), \vec{u}(t)]} = -\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & 2-2t \\ 1 & -t \end{vmatrix} = 1-t \end{aligned}$$

Ainsi, \mathcal{C} est paramétrée par $P = M(t) + (1-t)\vec{u}(t)$, $t \in \mathbb{R}$, et $\mathcal{C} : \begin{cases} x = 2(1-t)^2 \\ y = t^2 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

b. De plus,

$$\begin{aligned} \begin{cases} x = 2-4t+2t^2 \\ y = t^2 \end{cases} &\iff \begin{cases} 4t = 2-x+2y \\ 16y = (2-x+2y)^2 \end{cases} \\ &\iff 16y = 4-4x+x^2+4y^2+8y-4xy \end{aligned}$$

Donc \mathcal{C} a pour équation cartésienne

$$x^2 + 4y^2 - 4xy - 4x - 8y + 4 = 0.$$

On reconnaît l'équation d'une conique, dont la matrice associée à la partie quadratique est $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$; $\det(A) = 0$ donc \mathcal{C} est de type parabole.

La matrice A est symétrique réelle donc diagonalisable en base orthonormée. A a pour valeurs propres 0 et $\text{tr}(A) - 0 = 5$. On trouve rapidement que $A = PDP^T$, avec

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad P = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

On pose $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$. L'équation de \mathcal{C} dans $\mathcal{R}' = (O; \vec{u}_1, \vec{u}_2)$ s'écrit :

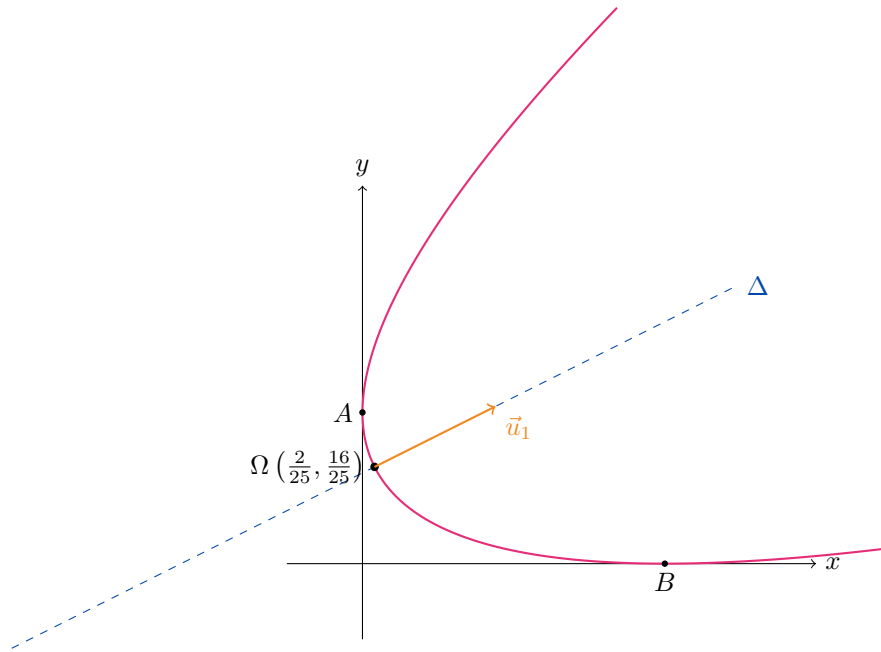
$$\begin{aligned} 0x'^2 + 5y'^2 - 4 \left(\frac{2x' - y'}{\sqrt{5}} \right) - 8 \left(\frac{x' + 2y'}{\sqrt{5}} \right) + 4 = 0 &\iff 5 \left(y' - \frac{6}{5\sqrt{5}} \right)^2 = \frac{16}{\sqrt{5}}x' - 4 + \frac{36}{25} \\ &\iff 5 \left(y' - \frac{6}{5\sqrt{5}} \right)^2 = \frac{16}{\sqrt{5}} \left(x' - \frac{4\sqrt{5}}{25} \right) \end{aligned}$$

On pose $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' - \frac{4\sqrt{5}}{25} \\ y' - \frac{6}{5\sqrt{5}} \end{pmatrix}$ et $\Omega \left(\frac{4\sqrt{5}}{25}, \frac{6}{5\sqrt{5}} \right)$ dans \mathcal{R}' .

Ainsi, dans le repère orthonormé direct $\mathcal{R}'' = (\Omega; \vec{u}_1, \vec{u}_2)$, la parabole \mathcal{C} a pour équation :

$$\mathcal{C} : Y^2 = \frac{16}{5\sqrt{5}}X \text{ est une parabole de sommet } \Omega, \text{ d'axe focal } \Delta = \Omega + \text{Vect}(\vec{u}_1).$$

Remarque. Dans le repère $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j})$, Ω a pour coordonnées $\left(\frac{2}{25}, \frac{16}{25} \right)$.



Remarque. On peut se demander à quoi servent les points A et B dans l'énoncé. Si $M = A$, alors $N = O$ et si $N = B$ alors $M = O$, ce qui montre que les deux axes du repère initial font partie de la famille de droites, et sont donc tangentes à la courbe, et ceux sont deux points de la parabole (correspondant à $t = 0$ et $t = 1$), ce qui peut aider à la tracer.