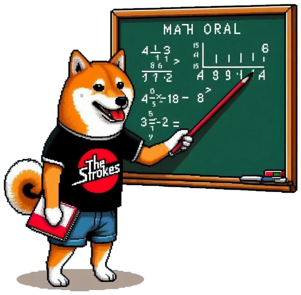
Mathématiques PT. 2025 - 2026

Mathématiques & Informatique - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
Lycée Voltaire, Paris 11e.



Préparation à l'oral

Math - Géométrie
Semaine du 26 Mai

Sujet OB-G-2

Soit (Γ) la courbe plane paramétrée par $M : t \longmapsto \begin{cases} x = \sin^2(t) \\ y = (1+\cos(t))\sin(t) \end{cases}$ dans un repère orthonormé.

1. Étudier et tracer (Γ). On tracera notamment toutes les tangentes remarquables.

Soient $M_1 = M(t)$ et $M_2 = M(t+\pi)$.

2. Montrer que $\overrightarrow{OM_1}$ et $\overrightarrow{OM_2}$ sont orthogonaux, puis donner un paramétrage $\begin{cases} x = X(t) \\ y = Y(t) \end{cases}$ du lieu (C) des milieux de $[M_1M_2]$.

3. Simplifier $\left(X(t) - \dfrac{1}{2}\right)^2 + Y(t)^2$, puis en déduire une équation cartésienne de (C) et sa nature.

Solution du sujet OB-G-2 : Math II 2017

1. Les fonctions x et y sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, 2π-périodiques, x est paire, y est impaire : on étudie sur $[0,\pi]$ et on complète par symétrie par rapport à (Ox) pour obtenir toute la courbe.

$$\forall t \in [0,\pi],\ \begin{cases} x'(t) = 2\sin(t)\cos(t) \\ y'(t) = (2\cos(t)-1)(\cos(t)+1) \end{cases}$$

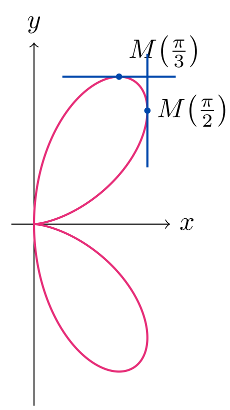
On en tire le tableau de variations ci dessous.

t	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$		π
$x'(t)$	0	$+$		$+$	0	$-$	0
$x(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{3}{4}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0
$y'(t)$		$+$	0	$-$		$-$	
$y(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	1	$\searrow$	0

Les tangentes aux points de paramètre 0 et $\dfrac{\pi}{2}$ sont verticales, la tangente au point de paramètre $\dfrac{\pi}{3}$ est horizontale et le point de paramètre π est le seul point singulier.

$$\begin{cases} x(\pi+h) = \sin^2(h) \underset{h\to 0}{=} h^2 + o(h^3) \\ y(\pi+h) = -(1-\cos(h))\sin(h) \underset{h\to 0}{=} -\dfrac{h^3}{2} + o(h^3) \end{cases}.$$

En $t=\pi$ on a donc un rebroussement de première espèce avec une tangente horizontale.



2. On calcule le produit scalaire : $\overrightarrow{OM_1}\cdot\overrightarrow{OM_2} = \sin^4(t) - \sin^2(t)(1-\cos(t))(1+\cos(t)) = \sin^2(t)(\sin^2(t) - 1 + \cos^2(t)) = 0$, donc $\overrightarrow{OM_1}$ et $\overrightarrow{OM_2}$ sont orthogonaux.

C admet pour représentation paramétrique $\begin{cases} X(t) = \sin^2(t) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\cos(2t)}{2} \\ Y(t) = \cos(t)\sin(t) = \dfrac{1}{2}\sin(2t) \end{cases}$ On reconnaît la représentation paramétrique du cercle de centre $\Omega\left(\dfrac{1}{2}, 0\right)$ et de rayon $\dfrac{1}{2}$.

3. $\left(X(t) - \dfrac{1}{2}\right)^2 + Y(t)^2 = \dfrac{1}{4}$ est une équation cartésienne de C, dans laquelle on reconnaît effectivement le même cercle.