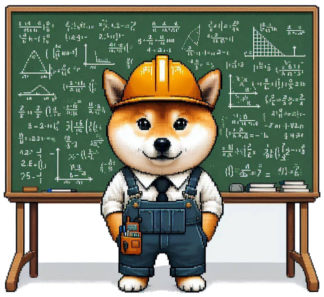
Mathématiques PT. 2025 - 2026

Mathématiques & Informatique - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
Lycée Voltaire, Paris 11e.



Préparation à l'oral

Math : Mines-Télécom
Semaine du 8 Juin

Sujet OB-IMT-1

Exercice 1

Des câble électrique ont chacun la probabilité $p \in]0,1[$ de transférer le bit qu'ils reçoivent. Soit X_n la variable aléatoire qui correspond au bit du n-ième câble.

1. Calculer, pour $(i,j) \in \{0,1\}^2, \mathbf{P}\left(X_{n+1} = j \mid X_n = i\right)$.

2. Trouver $\mathbf{P}\left(X_{n+1} = 1\right)$ en fonction de $p, \mathbf{P}\left(X_n = 1\right)$ et $\mathbf{P}\left(X_n = 0\right)$.

3. Soit $V_n = \begin{pmatrix} \mathbf{P}(X_n = 0) \\ \mathbf{P}(X_n = 1) \end{pmatrix}$. Trouver une relation entre V_{n+1} et V_n.

4. Exprimer V_n en fonction de p, n et V_0.

Exercice 2

Soit un espace euclidien E tel que $\dim(E) = n$ et $\mathscr{B}$ une BON de E.

1. On note X et Y les matrices colonnes des coordonnées des vecteurs x et y dans $\mathscr{B}$.
Donner l'expression matricielle du produit scalaire de x et y.

2. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ de matrice A dans $\mathscr{B}$ et f^* de matrice A^T dans $\mathscr{B}$.
Montrer que $(f(x) \mid y) = (x \mid f^*(y))$.

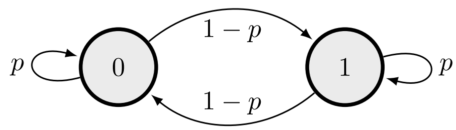
3. Définir un projecteur orthogonal p de E.

4. Montrer que $(p(x) \mid y) = (p(x) \mid p(y))$.

Sujet OB-IMT-1 : IMT 2019, Solution

Solution Exercice 1

1. D'après l'énoncé, on peut écrire $\mathbf{P}\left(X_{n+1}=j \mid X_n=i\right)=\left\{\begin{array}{rl} p, & \text{si } j=i \\ 1-p, & \text{si } j \neq i \end{array}\right.$



2. Par la formule des probabilités totales, avec le s.c.e $\{[X_n=0],[X_n=1]\}$, on a
$$\mathbf{P}\left(X_{n+1}=1\right)=\mathbf{P}\left(x_n=0\right)\mathbf{P}\left(X_{n+1}=1 \mid X_n=0\right)+\mathbf{P}\left(X_n=1\right)\mathbf{P}\left(X_{n+1}=1 \mid X_n=1\right)$$
$$\mathbf{P}\left(X_{n+1}=1\right)=(1-p)\mathbf{P}\left(X_n=0\right)+p\mathbf{P}\left(X_n=1\right).$$
3. De même $\mathbf{P}\left(X_{n+1}=0\right)=p\mathbf{P}\left(X_n=0\right)+(1-p)\mathbf{P}\left(C_n=1\right)$. Ainsi,
$$V_{n+1}=AV_n \text{ où } A=\begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{pmatrix}$$
4. Par récurrence , $\forall n \in \mathbb{N}^*, V_n=A^n V_0$. $A \in \mathscr{S}_2(\mathbb{R})$ est donc diagonalisable en b.o.n.
La somme des lignes fait 1, on en déduit que 1 est valeur propre ; on trouve l'autre valeur propre avec la trace, et au final $\operatorname{Sp}(A)=\{1,2p-1\}$. On diagonalise. On obtient finalement
$$A=PDP^\top \text{ avec } P=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2p-1 \end{pmatrix} \text{ d'où } D^n=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (2p-1)^n \end{pmatrix}.$$
Il suit que
$$\mathbf{P}\left(X_n=1\right)=\frac{1}{2}\left[\left(1+(2p-1)^n\right)\mathbf{P}\left(X_0=1\right)+\left(1-(2p-1)^n\right)\mathbf{P}\left(X_0=0\right)\right]$$
$$\mathbf{P}\left(X_n=0\right)=\frac{1}{2}\left[\left(1-(2p-1)^n\right)\mathbf{P}\left(X_0=1\right)+\left(1+(2p-1)^n\right)\mathbf{P}\left(X_0=0\right)\right]$$

Solution Exercice 2

1. $(x \mid y)=X^\top Y=Y^\top X$ par symétrie.
2. $(f(x) \mid y)=Y^\top AX=\left(A^\top Y\right)^\top X=(x \mid f^*(y))$.
3. Soit F un s.e.v. de E, de dimension finie ℓ. On a alors $E=F \oplus F^\perp$. Le projecteur orthogonal sur F est le projecteur sur F parallèlement à $F^\perp$. On peut écrire
$$p(x)=\sum_{i=1}^{\ell}\left(x \mid e_i\right)e_i,$$
où $(e_1,\ldots,e_\ell)$ b.o.n de F.
4. $(p(x) \mid y)=(p(x) \mid y-p(y))+(p(x) \mid p(y))=(p(x) \mid p(y))$ car $y-p(y) \in F^\perp$ et $p(x) \in F$.