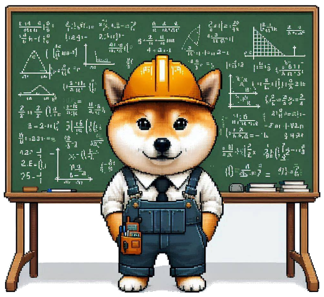
Mathématiques & Informatique - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
Lycée Voltaire, Paris 11e.



Préparation à l'oral

Math : Mines-Télécom
Semaine du 8 Juin

Sujet OB-IMT-2

Exercice 1

Soit $f \in \mathscr{L}\left(\mathbb{R}^3\right)$ vérifiant $f^3 + f = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)}$.

1. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \operatorname{Im}(f) \oplus \operatorname{Ker}(f)$.

2. Montrer que si λ est valeur propre de f alors $\lambda^3 + \lambda = 0$. Déterminer si f est diagonalisable.

3. Montrer que $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Ker}\left(f^2 + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}\right)$ et que, si $f \neq 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)}$, il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 2

On dispose d'un lot de n pièces de monnaie équilibrées (avec $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$) qu'on distribue à n personnes qui les lancent en même temps.

1. Déterminer la probabilité qu'au moins une personne ait un lancé différent des autres.

2. Soit X la variable aléatoire correspondant au nombre de lancés nécessaires pour qu'au moins une personne ait un lancé différent des autres. Donner son espérance et sa variance.

Sujet OB-IMT-2 : IMT 2022, Solution

Solution Exercice 1

1. Soit $y \in \mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f)$.
Il existe alors $x \in \mathbb{R}^3$ tel que $y = f(x)$ et $\mathbb{0}_{\mathbb{R}^3} = f(y) = f^2(x)$. Par hypothèse, on a alors

$$0 = f^3(x) + f(x) = y$$

donc l'intersection est réduite au vecteur nul ; la somme est directe. Il découle du théorème du rang l'égalité demandée.

2. Soit λ une valeur propre de f et $x \neq 0$ un vecteur propre associé. Alors $f(x) = \lambda x$ et il suit que $f^3(x) = \lambda^3 x$ donc $(\lambda^3 + \lambda)x = 0$. Comme $x \neq 0$, on a $\lambda^3 + \lambda = 0$ ce qui donne $\lambda = 0$ ou $\lambda^2 + 1 = 0$. Ainsi, 0 est l'unique valeur propre possible de f. Comme $\deg(\chi_f) = 3$ est impair, il y a au moins une racine (et donc une valeur propre) et 0 est toujours la seule valeur propre.
Si f est nulle, f est déjà diagonal. Si f est non nul, il ne peut être diagonalisable car sinon il existerait une matrice diagonale représentant f dont les coefficients sont les valeurs propres de f donc 0 ce qui impliquerait que f est nul ce qui est contradictoire.

3. On raisonne par double inclusion.

- ✗ Soit $y \in \mathrm{Im}(f)$. Alors $y = f(x)$ pour un certain x. Il suit que
$$\left(f^2 + \mathrm{id}\right)(y) = f^3(x) + f(x) = \left(f^3 + f\right)(x) = 0$$
donc $y \in \mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{id})$.
- ✗ Réciproquement, si $y \in \mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{id})$, alors $f^2(y) + y = 0$ donc $y = -f^2(y) = f\left(-f(y)\right) \in \mathrm{Im}(f)$ et le tour est joué.

On nous dit que que f est non nulle. On commence donc par exploiter cette hypothèse. Il existe x (nécessairement) non nul, tel que $f(x) \neq 0$. D'après la Question **1.** et le début de celle-ci, on a aussi

$$\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{id}).$$

Ceci permet d'écrire $x = y + z$ selon cette décomposition et $f(x) = f(z)$.
$f^3(z) + f(z) = 0$ donc $(f^2 + \mathrm{id})(f(z)) = 0$ ce qui veut dire que $f(z) \in \mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{id})$. Montrons que $(z, f(z))$ est libre. Si $az + bf(z) = 0$ alors $af(z) + bf^2(z) = 0$ or $f^2(z) = -z$ donc $af(z) - bz = 0$. Si $a \neq 0$, $z = -\frac{b}{a}f(z) = \frac{b^2}{a^2}z$ absurde. Donc $a = 0$. Puis $b = 0$ car $z \notin \mathrm{Ker}(f)$. Ainsi $\mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{id})$ est de dimension au moins 2. Comme le noyau est de dimension au moins 1 (on a dit que 0 était toujours valeur propre), on a $\dim \mathrm{Ker}(f) = 1$ et $\dim \mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{id}) = 2$. On prend (y) une base de $\mathrm{Ker}(f)$. Par concaténation, la famille $(y, f(z), z)$ est libre et forme une base de $\mathbb{R}^3$ et on a la matrice demandée dans cette base.

Solution Exercice 2

1. On passe par la probabilité du contraire, à savoir que tout la pièce de tout le monde retombe sur le même côté, c'est à dire d'obtenir n *Face* ou bien n *Pile*, ce qui se produit dans chaque cas avec probabilité $\left(\frac{1}{2}\right)^n$. La probabilité cherchée est donc

$$p_n = 1 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

2. Il s'agit du temps d'attente du premier succès (ici assimilé au fait qu'au moins une personne obtienne une face différence des autres, ce qui se produit avec probabilité p_n), X suit donc une loi géométrique $X \sim \mathcal{G}(p_n)$. D'après le cours

$$\mathbf{E}(X) = \frac{1}{p_n} = \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}} \underset{n\to+\infty}{\sim} 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}, \qquad \mathbf{V}(X) = \frac{1 - p_n}{p_n^2} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)^2}$$