



Préparation à l'oral

Math : Mines-Télécom
Semaine du 8 Juin

Sujet OB-IMT-3

Exercice 1

Déterminer les réels a et b pour lesquels la série

$$\sum \left(2 + (an + b) \ln \left(\frac{n+2}{n+4} \right) \right)$$

converge.

Exercice 2

L'espace \mathcal{E} étant rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ orthonormé, on considère la surface \mathcal{S} d'équation

$$x - 8yz = 0$$

ainsi que la droite \mathcal{D} d'équations :

$$\begin{cases} y + 4z + 2 = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

1. La surface \mathcal{S} est-elle régulière?
2. Déterminer les plans tangents à \mathcal{S} qui contiennent \mathcal{D} .

Sujet OB-IMT-3 : IMT 2025, Solution

Solution Exercise 1

Observons que si $a = 0$ alors le terme général tend vers 2 et la série diverge grossièrement. On a, pour $n \rightarrow +\infty$,

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{n+2}{n+4}\right) &= \ln\left(1 - \frac{2}{n+2}\right) = -\frac{2}{n+2} + \frac{2}{(n+2)^2} + o\left(\frac{1}{(n+2)^2}\right) \\ &= -\frac{2}{n(1+2/n)} + \frac{2}{n^2(1+2/n)^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= -\frac{2}{n}\left(1 - \frac{2}{n} + \frac{4}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) + \frac{2}{n^2}\left(1 - \frac{2}{n} + \frac{4}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^2 + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= -\frac{2}{n} + \frac{6}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

Il suit que

$$2 + (an + b) \ln\left(\frac{n+2}{n+4}\right) = 2 - 2a - \frac{2b+6a}{n} + \frac{b}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Il est alors nécessaire que $2a = 2$ donc $a = 1$ puis $2b + 6a = 0$ (si $2 - 2a \neq 0$ la série diverge grossièrement, si $2b + 6a \neq 0$, le terme général est équivalent à un multiple de la série harmonique divergente). Il est donc nécessaire que $a = 1$ et $b = -3$. Auquel cas, on a

$$2 + (an + b) \ln\left(\frac{n+2}{n+4}\right) \sim \frac{-3}{n^2},$$

ce qui est suffisant pour faire converger la série par critère d'équivalence pour les séries à termes de signe constant.

Solution Exercise 2

1. En posant $F : (x, y, z) \mapsto x - 8yz$, on sait qu'un point (x, y, z) de la surface est régulier si et seulement si $\nabla F(x, y, z) \neq 0$. Or,

$$\nabla F(x, y, z) = (1 \quad -8z \quad -8y) \neq 0$$

(la première composante est non nulle, quel que soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$). Ainsi tous les points de la surface sont réguliers.

2. Un point $P = (x, y, z)$ appartient au plan tangent en $M = (a, b, c)$ si et seulement si $\overrightarrow{MP} \perp \nabla F(a, b, c)$. Le plan tangent à \mathcal{S} en un point $M = (a, b, c)$ est le plan d'équation

$$\mathcal{P}_M : x - 8cy - 8bz + 8bc = 0.$$

Observons que $(x, y, z) \in \mathcal{D} \iff \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = 1 \\ y = -4t - 2 \\ z = t \end{cases}$.

On cherche donc les points $M = (a, b, c)$ pour lesquels tous les points de la droite \mathcal{D} sont contenus dans le plan \mathcal{P}_M , c'est à dire

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, (1, -4t - 2, t) \in \mathcal{P}_M &\iff \forall t \in \mathbb{R}, 1 - 8c(-4t - 2) - 8bt + 8bc = 0 \iff \begin{cases} 32c - 8b = 0 \\ 16c + 1 + 8bc = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} b = 4c \\ 16c + 1 + 32c^2 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Or,

$$16c + 1 + 32c^2 \iff c = \frac{-2 \pm \sqrt{2}}{8}$$

et $M \in \mathcal{S}$ ce qui donne $a = 8bc = 3 \mp 2\sqrt{2}$. Il y a donc deux points qui fonctionnent :

$$\left(3 - 2\sqrt{2}, \frac{-2 + \sqrt{2}}{2}, \frac{-2 + \sqrt{2}}{8}\right) \quad \text{et} \quad \left(3 + 2\sqrt{2}, \frac{-2 - \sqrt{2}}{2}, \frac{-2 - \sqrt{2}}{8}\right).$$