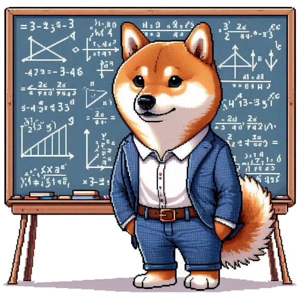
Mathématiques PT. 2025 - 2026

Mathématiques & Informatique - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
Lycée Voltaire, Paris 11e.



Préparation à l'oral

Math : Math 1
Semaine du 8 Juin

Sujet OB-MAT1-2

On note f la fonction inverse et $L(f)$ la longueur de l'arc de la courbe de f sur $[1/2, 1]$.

1. Donner une expression intégrale de $L(f)$.

2. Montrer que la longueur de la courbe de f est la même sur $[1/2, 1]$ et sur $[1, 2]$.

3. Rappeler le développement en série entière de $(1+u)^a$ avec $a \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{N}$.

4. Montrer que, pour tout $t \in]0,1[$, $\dfrac{\sqrt{1+t^4}-1}{t^2} = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}(2n)!}{(2n-1)2^{2n}(n!)^2} t^{4n-2}$.

5. On note, pour $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \dfrac{(2n)!}{(2n-1)2^{2n}(n!)^2}$.
Montrer que $(a_n)_{n\geq 1}$ est décroissante et déterminer un équivalent de a_n. *On pourra utiliser que* $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$.

6. En déduire une expression de $L(f)$ sous forme de série numérique. *On vérifiera avec soin les hypothèses du théorème utilisé.*

7. Donner une valeur approchée de $L(f)$ en utilisant les 3 premiers termes de la série obtenue à la question précédente et donner une majoration de l'erreur commise.

Sujet OB-MAT1-2 : MATH I 2023, Question de cours & Solution

Question de cours

Théorème de Pythagore dans un espace pré-hilbertien, démonstration.

Solution

1. Par définition,

$$L(f) = \int_{1/2}^{1} \sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x = \int_{1/2}^{1} \sqrt{1+\frac{1}{x^4}}\,\mathrm{d}x$$

2. Par changement de variable $x = \frac{1}{u}$ (licite car de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle), on obtient $\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{u^2}\mathrm{d}u$ ce qui donne

$$L(f) = \int_{1}^{2} \frac{\sqrt{1+u^4}}{u^2}\,\mathrm{d}u = \int_{1}^{2} \sqrt{1+\frac{1}{u^4}}\,\mathrm{d}u$$

donc la longueur est la même sur les deux intervalles.

3. D'après le cours, $(1+u)^a = 1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a-1)(a-2)\cdots(a-n+1)}{n!}u^n$ pour $|u|<1$ (rayon de convergence $R=1$).

4. Si $t \in]0,1[$, $t^4 \in]0,1[$ et on peut appliquer la formule précédente avec $u = t^4$ et $a = 1/2$. Ce qui donne

$$(1+t^4)^{1/2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1/2)(1/2-1)(1/2-2)\cdots(1/2-n+1)}{n!}t^{4n}.$$

Or, pour $n \geq 1$,

$$\frac{(1/2)(1/2-1)(1/2-2)\cdots(1/2-n+1)}{n!} = \frac{(-1)^{n-1}\times 1 \times 3 \times \ldots \times (2n-3)}{2^n} = \frac{(-1)^{n-1}(2n)!}{(2n-1)(n!)^2 4^n}$$

Il suit que

$$(1+t^4)^{1/2} - 1 = t^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(2n)!}{(2n-1)(n!)^2 4^n} t^{4n-2}$$

ce qui donne bien $\dfrac{\sqrt{1+t^4}-1}{t^2} = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}(2n)!}{(2n-1)2^{2n}(n!)^2} t^{4n-2}$.

5. Observons que $a_n > 0$ pour tout $n \geq 1$. De plus, $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{(2n-1)}{2(n+1)} < 1$, donc (a_n) est bien décroissante. En utilisant Stirling qui est rappelé

$$a_n = \frac{(2n)!}{(2n-1)(n!)^2 4^n} \sim \frac{1}{4^n \times 2n} \times \sqrt{4\pi n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} \times \frac{1}{2\pi n}\left(\frac{e}{n}\right)^{2n} \sim \frac{1}{2n\sqrt{\pi n}}$$

6. On utilise tous les résultats précédents

$$\begin{aligned} L(f) &= \int_{1/2}^{1} \frac{\sqrt{1+t^4}}{t^2}\mathrm{d}t = \int_{1/2}^{1} \frac{\sqrt{1+t^4}-1}{t^2}\mathrm{d}t + \int_{1/2}^{1} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \\ &= \int_{1/2}^{1} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}(2n)!}{(2n-1)2^{2n}(n!)^2} t^{4n-2} \right) \mathrm{d}t + 1 \end{aligned}$$

On veut alors permuter intégrale et somme infinie.
Notons

$$f_n : t \mapsto \frac{(-1)^{n-1}(2n)!}{(2n-1)2^{2n}(n!)^2} t^{4n-2}.$$

Ces fonctions sont intégrales sur $[1/2, 1]$ (car continues). Pour pouvoir permuter comme on le souhaite, on soit vérifier que la série

$$\sum \int_{1/2}^{1} |f_n(t)|\mathrm{d}t$$

est convergente. Or

$$\int_{1/2}^{1} |f_n(t)|\mathrm{d}t = a_n \left[\frac{t^{4n-1}}{4n-1}\right]_{1/2}^{1} \sim \frac{a_n}{4n}\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{4n-1}\right) \sim \frac{1}{8n^2\sqrt{\pi n}}$$

qui est bien le terme général d'une série convergente (par Riemann) ce qui permet d'appliquer le critère d'équivalence pour les SATP et de conclure au caractère licite de la permutation et d'écrire

$$L(f) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} a_n}{4n-1} \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{4n-1}\right) \simeq 1 + \frac{7a_1}{8} - \frac{127a_2}{896}$$

La suite (a_n) étant décroissante, on sait (critère des séries alternées) qu'on peut majorer le reste ; l'erreur commise est donc majorée par a_3.