



## Préparation à l'oral

Math : Math 1  
Semaine du 8 Juin

### Sujet OB-MAT1-3

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé, on considère la surface  $(S) : z = \ln(x^2 + y^2)$ .

1. Pour  $a \in \mathbb{R}$  on définit le plan  $P_a : z = a$  et  $\Lambda_a = (S) \cap P_a$ .  
Quelle est la nature de  $\Lambda_a$  ? Que peut on en déduire pour  $(S)$  ?
2. Soit  $M_0(x_0, 0, z_0)$  un point de  $(S)$ .  
Calculer l'intersection de  $(Oz)$  avec le plan tangent à  $(S)$  en  $M_0$ .  
Soit  $M_1 \in \Lambda_{z_0}$ . Sans calcul, donner l'intersection de  $(Oz)$  avec le plan tangent à  $(S)$  en  $M_1$ .
3. Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  et ne s'annulant pas, et  $\Gamma$  la courbe paramétrée par

$$M : t \mapsto \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \\ z = \ln((f(t))^2 + (g(t))^2) \end{cases} .$$

Justifier que  $\Gamma$  est tracée sur  $(S)$ .

Déterminer, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , le réel  $a(t)$  tel que  $M(t) \in \Gamma \cap \Lambda_{a(t)}$ .

4. Trouver  $f$  et  $g$  telles que les tangentes à  $\Gamma$  et à  $\Lambda_{a(t)}$  en  $M(t)$  soient orthogonales pour tout  $t \in \mathbb{R}$ .

## Sujet OB-MAT1-3 : MATH I 2022, Question de cours & Solution

### Question de cours

Définition et propriétés de deux matrices semblables. Les réciproques sont-elles vraies ?

### Solution

1.  $\Lambda_a$  a pour équations  $\begin{cases} z = \ln(x^2 + y^2) \\ z = a \end{cases}$  soit  $\begin{cases} x^2 + y^2 = e^a \\ z = a \end{cases}$  : il s'agit du cercle de  $P_a$  de centre  $\Omega_a(0, 0, a)$  et de rayon  $e^{a/2}$ .

Lorsque  $a$  décrit  $\mathbb{R}$ ,  $\Lambda_a$  décrit les sections de  $(S)$  par les plans orthogonaux à  $(Oz)$ , et ces sections sont des cercles centrés sur  $(Oz)$  :  $(S)$  est une surface de révolution d'axe  $(Oz)$ .

2. Le plan tangent à  $(S)$  en  $M_0$  a pour équation

$$z - z_0 = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(M_0)(x - x_0) + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(M_0)y,$$

avec  $\varphi : (x, y) \mapsto \ln(x^2 + y^2)$ . Il s'agit donc du plan

$$T_0 : z = z_0 + \frac{2x_0}{x_0^2 + y_0^2}x + \frac{2y_0}{x_0^2 + y_0^2}y - \frac{2x_0^2}{x_0^2 + y_0^2}.$$

Ainsi,  $T_0 \cap (Oz)$  est défini par

$$\begin{cases} z = z_0 + \frac{2x_0}{x_0^2 + y_0^2}x + \frac{2y_0}{x_0^2 + y_0^2}y - \frac{2x_0^2}{x_0^2 + y_0^2} \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases},$$

on obtient l'unique point

$$N_0 \left( 0, 0, z_0 - \frac{2x_0^2}{x_0^2 + y_0^2} \right).$$

Soit  $T_1$  le plan tangent à  $(S)$  en  $M_1$ . Puisque  $M_1 \in \Lambda_{z_0}$ , il est l'image de  $M_0 \in \Lambda_{z_0}$  par une rotation  $r$  d'axe  $(Oz)$ . Cette rotation conserve  $(S)$  et tout point de  $(Oz)$  est invariant par  $r$ . De plus,  $r$  étant une isométrie, elle conserve l'orthogonalité (et les distances) et donc  $T_1$  est l'image de  $T_0$  par  $r$ .

Puis  $T_1 \cap (Oz)$  est l'image de  $T_0 \cap (Oz) = \{N_0\}$  par  $r$ .

$N_0$  étant invariant, on a donc  $T_1 \cap (Oz) = \{N_0\}$ .

3. De manière évidente, tout point de  $\Gamma$  vérifie  $z = \ln(x^2 + y^2)$  et donc est un point de  $(S)$ . Mais

$$\Gamma \cap \Lambda_{a(t)} = \Gamma \cap (S) \cap P_{a(t)} = \Gamma \cap P_{a(t)}$$

car  $\Gamma$  est tracée sur  $(S)$ . Or  $\Gamma \cap P_{a(t)}$  est décrit par  $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \\ z = \ln((f(t))^2 + (g(t))^2) \\ z = a(t) \end{cases}$  et on a donc

$$a(t) = \ln((f(t))^2 + (g(t))^2).$$

4.  $\Lambda_{a(t)}$  a pour équations cartésiennes  $\begin{cases} x^2 + y^2 - e^{a(t)} = 0 \\ z - a(t) = 0 \end{cases}$ . Notons  $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - e^{a(t)}$  et  $G(x, y, z) = z - a(t)$  :

la tangente à  $\Lambda_{a(t)}$  en  $M(t)$  est dirigée par  $\nabla F(M(t)) \wedge \nabla G(M(t))$ .

Or  $\nabla F \wedge \nabla G = \begin{pmatrix} 2y \\ -2x \\ 0 \end{pmatrix}$  donc

$$\nabla F(M(t)) \wedge \nabla G(M(t)) = \begin{pmatrix} 2g(t) \\ -2f(t) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La tangente à  $\Gamma$  en  $M(t)$  est dirigée par  $\frac{d\vec{M}}{dt}(t) = \begin{pmatrix} f'(t) \\ g'(t) \\ 2 \frac{f'(t)f(t) + g'(t)g(t)}{(f(t))^2 + (g(t))^2} \end{pmatrix}$ .

Ces deux vecteurs sont orthogonaux si et seulement si  $f'(t)g(t) - g'(t)f(t) = 0$ .

Dire que les tangentes à  $\Gamma$  et à  $\Lambda_{a(t)}$  en  $M(t)$  sont orthogonales pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , c'est donc dire que pour tout  $t \in \mathbb{R}$  on

---

a  $f'(t)g(t) - g'(t)f(t) = 0$ , ce qui équivaut à  $\frac{f'(t)g(t) - g'(t)f(t)}{(g(t))^2} = \left(\frac{f}{g}\right)'(t) = 0$ , ou encore  $f = kg$  pour  $k$  réel fixé.

Les courbes solutions sont donc celles paramétrées par

$$\begin{cases} x = kg(t) \\ y = g(t) \\ z = \ln((1+k^2)(g(t))^2) \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$