Mathématiques PT. 2025 - 2026

Mathématiques & Informatique - F. Gaunard
`http://frederic.gaunard.com`
Lycée Voltaire, Paris 11e.

Préparation à l'oral

Math II
Semaine du 15 Juin

Sujet OB-MATH2-10

Exercice de mathématiques

Soit $n \geqslant 2$ un entier et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de rang 1.

1. Montrer que A est semblable à une matrice dont les $n-1$ premières colonnes sont nulles.
2. Montrer que $A^2 = \operatorname{Tr}(A)\, A$ et $\det(I_n + A) = 1 + \operatorname{Tr}(A)$.
3. Déterminer le spectre de A.

Exercice d'informatique

On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé. Chaque point du plan est caractérisé par une liste de deux réels du type `[x,y]`.

On rappelle que, si C est un point et r un réel, l'image M' du point M par l'homothétie de centre C et de rapport r est l'unique point M' tel que :

$$\overrightarrow{CM'} = r\, \overrightarrow{CM}.$$

1. Écrire une fonction `H` de trois arguments, un point C, une valeur réelle r et un point M qui renvoie l'image de M par l'homothétie de centre C et de rapport r.

On se donne m homothéties du plan de centres C_i et de rapports $r_i \in]0,1[$.
On appelle *jeu du chaos* la suite de points $(M_k)_{k\geqslant 0}$ construite de la manière suivante :

- ✗ le point M_0 est donné ;
- ✗ pour tout $k \geqslant 0$, on pose $M_{k+1} =$`H`(C_i, r_i, M_k) où i est tiré au sort à chaque itération avec une loi équiprobable. Avec `Python`, on pourra utiliser la fonction `randint` de la bibliothèque `random`.

2. Écrire une fonction `tirer` de quatre arguments, la liste des centres des homothéties, la liste des rapports des homothéties, le point M_0 et le nombre n d'itérations qui renvoie la liste des $n+1$ premiers points de la suite.

3. Tracer les 5001 premiers points de la suite définie par les trois homothéties de rapports 0.5 et de centres trois sommets d'un triangle équilatéral et de premier point l'un de ces sommets.

4. Définir une fonction `T` de trois arguments m, r et n qui trace les $n+1$ premiers points de la suite obtenue pour un jeu d'homothéties de même rapport r et dont les centres sont les sommets d'un polynôme régulier à m côtés et de premier point l'un de ces sommets.
Tester `T(5,0.37,10000)`.

OB-MATH2-10, Solution

Solution de l'exercice de math

1. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A. Comme $\mathrm{rg}(A) = 1$, on a, par le théorème du rang, $\dim \mathrm{Ker}(f) = n - \mathrm{rg}(f) = n - 1$.
En complétant une base du noyau $\left(e'_1, \ldots, e'_{n-1}\right)$ en une base $\mathscr{B} = \left(e'_1, \ldots, e'_{n-1}, e'_n\right)$ de $\mathbb{R}^n$, on obtient pour matrice de f dans $\mathscr{B}$ une matrice de la forme

$$T = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \alpha_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Ainsi A est semblable à T, dont les $n-1$ premières colonnes sont nulles.

2. On conserve les notations précédentes. On constate que $\alpha_n = \mathrm{Tr}(T) = \mathrm{Tr}(A)$, car deux matrices semblables ont la même trace. En effectuant le produit matriciel de T par T, on obtient :

$$T^2 = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \alpha_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \alpha_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \alpha_1\alpha_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \alpha_2\alpha_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_n\alpha_n \end{pmatrix} = \alpha_n T.$$

Donc $T^2 = \mathrm{Tr}(A)T$ et par conséquent : $A^2 = \mathrm{Tr}(A)A$.
Les matrices $I_n + A$ et $I_n + T$ sont semblables, car elles représentent l'endomorphisme $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n} + f$ dans deux bases différentes; elles ont donc le même déterminant :

$$\det\left(I_n + A\right) = \det\left(I_n + T\right) = \begin{vmatrix} 1 & \ldots & 0 & \cdots & 0 & \alpha_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 & \alpha_{n-1} \\ 0 & \ldots & \cdots & 0 & 0 & 1+\alpha_n \end{vmatrix} = 1 + \alpha_n = 1 + \mathrm{Tr}(A).$$

3. Comme elles sont semblables, les matrices A et T ont même spectre. La matrice T étant triangulaire, ses valeurs propres se lisent sur sa diagonale, donc :

$$\mathrm{Sp}(A) = \{0, \mathrm{tr}(A)\}$$

Solution de l'exo d'info

```python
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
```

1.

```python
def H(C,r,M):
    a, b = C[0], C[1] # coordonées de C
    x, y = M[0], M[1] # coordonées de M
    x1 = r*x + (1-r)*a # abscisse de M'
    y1 = r*y + (1-r)*b # ordonnée de M'
    return [x1,y1]
```

2.

```python
def tirer(LC,Lr,M0, n):
    m = len(LC)
    k = 0
    M = M0
    Res = []
    while k < n+1:
        Res.append(M)
        i = np.random.randint(0,m) # tirage d'un entier i entre 0 et m-1
        C = LC[i] # le cnetre Ci
        r = Lr[i] # le rapport ri
        M = H(C,r,M)
```

```
        k += 1
    return Res
```

3.
```
A = [-1,0]; B = [1,0]; C = [0,np.sqrt(3)] # ABC est un triangle équilatéral
LC = [A,B,C] # les centres
Lr = [1/2,1/2,1/2] # les rapports

sys = tirer(LC,Lr,A,5000)
X = [p[0] for p in sys] # abscisses
Y = [p[1] for p in sys] # ordonées
plt.plot(X,Y,'x')
plt.axis('equal')
plt.show()
```

4.
```
def T(m,r,n):
    Lr = [r for k in range(m)]
    LC = [[np.cos(2*k*np.pi/m),np.sin(2*k*np.pi/m)] for k in range(m)] # Les images des r
    sys = tirer(LC,Lr,LC[0],n)
    X = [p[0] for p in sys] # abscisses
    Y = [p[1] for p in sys] # ordonées
    plt.plot(X,Y,'x')
    plt.axis('equal')
    plt.show()
```