

Préparation à l'oral

Math II
Semaine du 15 Juin

Sujet OB-MATH2-11

Exercice de mathématiques

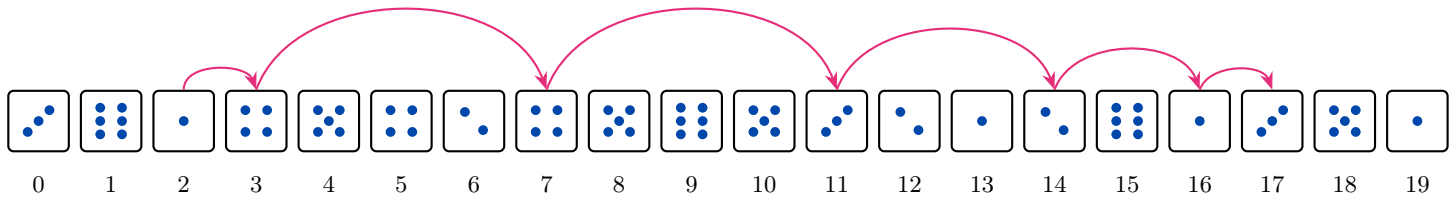
Soient X et Y sont deux variables aléatoires réelles discrètes dont le carré est d'espérance finie. On pose

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{E}(X^2) & \mathbf{E}(X) \\ \mathbf{E}(X) & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad f(a, b) = \mathbf{E}[(Y - aX - b)^2].$$

1. À quelle condition A est-elle inversible? Pour la suite, on suppose que cette condition est vérifiée.
2. Justifier que A est diagonalisable dans \mathbb{R} . Déterminer le signe de ses valeurs propres.
3. Justifier que f est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}^2 et que ses points critiques vérifient $A \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = B$, avec B à déterminer.
4. En déduire l'ensemble des points critiques de f puis étudier leurs natures.

Exercice d'informatique

On lance n dés cubiques usuels aux faces numérotées de 1 à 6. Les dés sont placés sur une ligne côte à côte. On choisit un dé dans le début de la liste et on avance, de la gauche vers la droite, d'autant de dés que la valeur marquée sur le dé départ. On recommence jusqu'à ce que cela ne soit plus possible. La situation est illustrée par le dessin ci-dessous.



1. Écrire une fonction `lancer` sans argument qui simule un lancer de dé et renvoie donc un entier entre 1 et 6. On pourra utiliser la fonction `randint` du module `numpy.random` de Python.
2. Écrire une fonction `liste` d'argument un entier n qui renvoie la liste des résultats de n lancers de dés.
3. Écrire une fonction `arrivee` de deux arguments, un entier k et une liste L de résultats, qui renvoie l'indice dans la liste L du dernier dé atteint en partant du dé numéro k , avec le procédé décrit dans l'énoncé.
On testera la procédure en calculant les numéros d'arrivée pour toutes les positions de départ d'un tirage de 15, puis 20, puis 25 dés. Que constatez-vous ?
4. Écrire une fonction `commun`, d'argument une liste de dés L , qui renvoie le plus grand entier k tel que les dés en position $0, 1, \dots, k$ aboutissent à la même position d'arrivée.
5. En utilisant la fonction `commun`, estimer la probabilité que les k premières positions d'une liste de n dés tirée au hasard aboutissent à la même position d'arrivée.
6. En déduire une estimation du nombre minimal n tel que les six premiers dés aient 95% de chances d'aboutir à la même position d'arrivée.

OB-MATH2-11, Solution

Solution de l'exercice de math

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes dont le carré est d'espérance finie. On pose

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{E}(X^2) & \mathbf{E}(X) \\ \mathbf{E}(X) & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad f(a, b) = \mathbf{E}[(Y - aX - b)^2]$$

1. La matrice A est inversible si et seulement si son déterminant est non nul. Or :

$$\det(A) = \mathbf{E}(X^2) - (\mathbf{E}(X))^2 = \mathbf{V}(X).$$

Par conséquent, la matrice A est inversible si et seulement si la variance de X est non nulle.

La condition $\mathbf{V}(X) = 0$ signifie que X est une variable aléatoire presque sûrement constante. Si tel n'est pas le cas, $\mathbf{V}(X) > 0$ (une variance est toujours positive ou nulle), A est inversible.

2. La matrice A est réelle symétrique, elle est, en vertu du théorème spectral, diagonalisable. Soit λ_1 et λ_2 les valeurs propres de A (éventuellement confondues). Leur produit est égal au déterminant de A :

$$\lambda_1 \lambda_2 = \det(A) = \mathbf{V}(X) > 0$$

et leur somme est égale à la trace de A :

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \text{Tr}(A) = \mathbf{E}(X^2) + 1.$$

Puisque $X^2 \geq 0$, $\mathbf{E}(X^2) \geq 0$ et donc $\text{Tr}(A) = \mathbf{E}(X^2) + 1 > 0$. Ainsi les valeurs propres de A sont toutes deux strictement positives.

3. Considérons l'expression $f(a, b) = \mathbf{E}[(Y - aX - b)^2]$. En développant le carré et en utilisant la linéarité de l'espérance :

$$\begin{aligned} f(a, b) &= \mathbf{E}[Y^2 - 2Y(aX + b) + (aX + b)^2] \\ &= \mathbf{E}[Y^2 - 2aXY - 2bY + a^2X^2 + 2abX + b^2] \\ &= \mathbf{E}(Y^2) - 2a\mathbf{E}(XY) - 2b\mathbf{E}(Y) + a^2\mathbf{E}(X^2) + 2ab\mathbf{E}(X) + b^2. \end{aligned}$$

Par hypothèse les espérances $\mathbf{E}(X^2)$ et $\mathbf{E}(Y^2)$ sont finies. Donc, d'après le cours, les espérances $\mathbf{E}(X)$, $\mathbf{E}(Y)$, $\mathbf{E}(XY)$ sont finies. L'expression de $f(a, b)$ a donc un sens et définit sur \mathbb{R}^2 une fonction polynomiale en a et b :

$$f(a, b) = \mathbf{E}(X^2)a^2 + 2\mathbf{E}(X)ab + b^2 - 2\mathbf{E}(XY)a - 2\mathbf{E}(Y)b + \mathbf{E}(Y^2).$$

Ainsi la fonction $f : (a, b) \mapsto \mathbf{E}[(Y - aX - b)^2]$ est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}^2 .

Les points critiques de f sont les points (a, b) où le gradient de f s'annule, i.e., $\nabla f(a, b) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Calculons les dérivées partielles premières de f :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial a}(a, b) &= -2\mathbf{E}(XY) + 2a\mathbf{E}(X^2) + 2b\mathbf{E}(X) \\ \frac{\partial f}{\partial b}(a, b) &= -2\mathbf{E}(Y) + 2a\mathbf{E}(X) + 2b \end{aligned}$$

En égalant ces dérivées à zéro, on obtient le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{aligned} a\mathbf{E}(X^2) + b\mathbf{E}(X) &= \mathbf{E}(XY) \\ a\mathbf{E}(X) + b &= \mathbf{E}(Y) \end{aligned}$$

système qu'on peut écrire sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E}(X^2) & \mathbf{E}(X) \\ \mathbf{E}(X) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{E}(XY) \\ \mathbf{E}(Y) \end{pmatrix}$$

On donc bien $A \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = B$, avec $B = \begin{pmatrix} \mathbf{E}(XY) \\ \mathbf{E}(Y) \end{pmatrix}$.

4. On a montré que les points critiques (a, b) sont solutions de l'équation $A \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = B$. Mais A étant inversible, l'équation précédente possède une seule solution (a_0, b_0) , à savoir :

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = A^{-1}B$$

L'ensemble des points critiques de f est donc le singleton $\{(a_0, b_0)\}$.

Pour étudier la nature de ce point critique, on calcule la matrice hessienne de f . Les dérivées partielles secondes de f sont :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial a^2} = 2\mathbf{E}(X^2), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial b^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial a \partial b} = \frac{\partial^2 f}{\partial b \partial a} = 2\mathbf{E}(X)$$

La matrice hessienne $H_f(a, b)$ est constante, égale à :

$$H_f(a, b) = 2 \begin{pmatrix} \mathbf{E}(X^2) & \mathbf{E}(X) \\ 2\mathbf{E}(X) & 1 \end{pmatrix} = 2A$$

À la question 2, nous avons établi que les valeurs propres de A sont strictement positives. Il en est de même pour les valeurs propres de $H_f = 2A$. Par conséquent, le point critique unique (a_0, b_0) correspond à un minimum local de f .

Remarque. On peut montrer, avec un argument supplémentaire, qu'en (a_0, b_0) f présente un minimum global.

Solution de l'exo d'info

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
```

```
1. def lancer() :
    return np.random.randint(1,6)

2. def liste(n):
    return [lancer() for i in range(n)]

3. def arrivee(k,L):
    n = len(L)
    i = k
    while i < n:
        indice = i
        i += L[i]
    return indice

for i in [15,20,25]:
    L = liste(i)
    for j in range(i):
        print(arrivee(j,L))
```

On a l'impression qu'on arrive souvent autour d'une même valeur...

```
4. def commun(L):
    i = arrivee(0,L)
    k = 0
    while k < len(L) and arrivee(k,L) == i:
        k += 1
    return k-1

5. def probabilite(n,N):
    # n nombre de dés, N nombre de tirages aléatoires
    Res = [0 for i in range(100)] # Liste des résultats de l'expérience
    for i in range(N):
        L = liste(n)
        r = commun(L)
        for k in range(r+1):
            Res[k] += 1
    freq = [Res[k]/N for k in range(n)] # Liste des fréquences observées
    return freq
```

```
6. n = 6
   while probabilite(n,1000)[5] < 0.95:
       n += 1
   print(n)
```

Après plusieurs tentatives, on trouve n autour de 33.