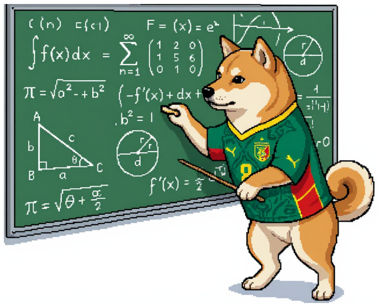
Mathématiques PT. 2025 - 2026

Mathématiques & Informatique - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
Lycée Voltaire, Paris 11e.



Préparation à l'oral

Math II
Semaine du 15 Juin

Sujet OB-MATH2-12

Exercice de mathématiques

Soient (a, b, c) un triplet non nul de $\mathbb{R}^3$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer une matrice colonne $C \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ telle que $CC^\top = A$.
2. Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et une base de $\mathrm{Im}(f)$.
3. Déterminer les éléments propres de f. L'endomorphisme f est-il diagonalisable?
4. Retrouver ces résultats en remarquant qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que λf soit un projecteur.

Exercice d'informatique

Dans la liste des entiers naturels non nuls, on barre un nombre sur 2 en commençant par barrer le deuxième :

$$1 \ , \ \cancel{2} \ , \ 3 \ , \ \cancel{4} \ , \ 5 \ , \ \cancel{6} \ , \ 7 \ , \ \cancel{8} \ , \ 9 \ , \ \cancel{10} \ , \ 11 \ , \ \cancel{12} \ , \ 13 \ , \ \cdots$$

Puis dans la liste restante, on barre un nombre sur 3 en commençant par barrer le troisième :

$$1 \ , \ 3 \ , \ \cancel{5} \ , \ 7 \ , \ 9 \ , \ \cancel{11} \ , \ 13 \ , \ \cdots$$

puis on barre un nombre sur 4, un nombre sur 5, etc.
Et ceci à l'infini pour obtenir «*la liste des nombres de type J*».

1. Écrire une fonction `enlever` de deux arguments, une liste L et un entier naturel i, qui renvoie une liste S construite en ne gardant dans la liste L que les éléments dont le rang n'est pas multiple de i.
Par exemple, `enlever([1,3,5,7,9,11,13],3)` doit donner `[1,3,7,9,13]`.

2. Écrire une suite d'instructions donnant la liste des nombres de type J inférieurs ou égaux à 100.

3. Écrire une fonction `LJ` d'argument n renvoyant la liste des nombres de type J inférieurs ou égaux à n.

4. Écrire une fonction `U` d'argument n renvoyant u_n, le nombre de nombres de type J inférieurs ou égaux à n.

5. Vers quelle limite ℓ semble tendre $4n/u_n^2$ quand n tend vers l'infini ?

6. Déterminer le premier n pour lequel la différence en valeur absolue entre $4n/u_n^2$ et ℓ est inférieure à 10^{-3}.

OB-MATH2-12, Solution

Solution de l'exercice de math

1. Si l'on pose

$$C = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix},$$

alors

$$C\,C^\top = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix} = A$$

2. ✗ Pour le noyau : Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Le vecteur u appartient au noyau de f si et seulement si $AX = 0$. L'équation $AX = 0$ équivaut à :

$$\begin{pmatrix} a(ax+by+cz) \\ b(ax+by+cz) \\ c(ax+by+cz) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Comme le triplet (a, b, c) est non nul, l'équation est équivalente à l'unique équation $ax + by + cz = 0$.
Le noyau de f est donc le plan vectoriel d'équation $ax + by + cz = 0$, soit

$$\mathrm{Ker}(f) = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz = 0\right\}$$

✗ Pour l'image : D'après le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\mathrm{Ker}(f)) = 3 - 2 = 1$. L'image de A est l'espace vectoriel engendré par les colonnes de A, qui sont toutes deux à deux proportionnelles. On a par exemple : $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right)$, ce qui signifie que

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\,(a, b, c)\,.$$

3. Éléménts propres :

✗ La matrice A est symétrique réelle. D'après le théorème spectral, elle est diagonalisable.

✗ Puisque $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 2$, 0 est une valeur propre de f et le sous-espace propre associé $E_0 = \mathrm{Ker}(f)$ est de dimension 2, ce qui implique la valeur propre 0 est de multiplicité 2.

✗ La valeur propre μ non nulle de f vérifie

$$0 + 0 + \mu = \mathrm{Tr}(A) = (a^2 + b^2 + c^2)$$

On en déduit que $\mu = (a^2 + b^2 + c^2)$ et, puisque les sous-espaces propres d'une matrice réelle symétrique sont deux à deux orthogonaux, on a directement

$$E_\mu = (\mathrm{Ker}(f))^\perp = \mathrm{Vect}((a, b, c)).$$

4. Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$; λf est un projecteur si et seulement si $(\lambda A)^2 = \lambda A$, soit si et seulement si $\lambda A^2 = A$. On a :

$$\begin{aligned} \lambda A^2 = A &\iff \lambda(CC^\top)(CC^\top) = A \iff \lambda C(C^\top C)C^\top = A \\ &\iff C(a^2+b^2+c^2)C^\top = A \iff \lambda(a^2+b^2+c^2)CC^\top = A \\ &\iff \lambda(a^2+b^2+c^2)CC^\top = A \iff \lambda(a^2+b^2+c^2)A = A \end{aligned}$$

Si l'on pose

$$\lambda = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2},$$

alors l'endomorphisme $p = \lambda f$ est un projecteur.
Pour un projecteur, on sait que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Im}(p)$. Les propriétés d'un projecteur (non nul et distinct de l'identité) nous donnent :

$$\mathrm{Sp}(p) = \{0, 1\}$$

✗ Comme $p(x) = 0 \iff f(x) = 0$, 0 est une valeur propre de f et $E_0(f) = \mathrm{Ker}(p) = \mathrm{Ker}(f)$.

✗ De même $p(x) = x \iff f(x) = \frac{1}{\lambda}x$. Donc $\frac{1}{\lambda}$ est une valeur propre de f et $E_{\frac{1}{\lambda}}(f) = \mathrm{Im}(p) = \mathrm{Im}(f)$.

On retrouve les résultats obtenus dans les questions précédentes.

Solution de l'exo d'info

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
import matplotlib.pyplot as plt
```

1.
```
def enlever(L,i):
    n = len(L)
    return [L[j] for j in range(0,n) if (j+1)%i != 0]
```

```
L = list(range(1,101))
for i in range(2,101):
    L = enlever(L,i)
print(L)
```

3.
```
def LJ(n):
    L = list(range(1,n+1))
    for i in range(2,n): # n//2 suffit
        L = enlever(L,i)
    return L
```

4.
```
def U(n):
    return len(LJ(n))
```

5.
```
X = list(range(1,2000))
Y = [4*n/U(n)**2 for n in X]
plt.plot(X,Y)
plt.show()
```

La suite $\left(4n/u_n^2\right)$ semble bornée, avec des oscillations autour de la valeur 3.12, ce qui conduit à conjecturer qu'elle tend vers le nombre π...

6.
```
n = 2
while np.abs(np.pi-(4*n/(U(n)**2))) > 0.001:
    n += 1
print(n)
```