



Préparation à l'oral

Math II
Semaine du 15 Juin

Sujet OB-MATH2-13

Exercice de mathématiques

Soient a , b et c trois nombres complexes de module 1 vérifiant $a + b + c = 1$.

1. Montrer que : $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$.
2. Soit P un polynôme de degré 3 de racines a, b, c . Montrer que une des trois vaut 1 et déterminer les deux autres.

Exercice d'informatique

On définit par récurrence la suite (s_n) en posant $s_0 = 0$, $s_1 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} s_{2n} = s_n, \\ s_{2n+1} = s_{n+1} + s_n, \end{cases}$$

1. Écrire les 8 premiers termes de la suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
2. Écrire une fonction LS prenant en argument un entier naturel N et renvoyant les N premiers termes de la suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
3. Écrire une fonction `trace` prenant comme argument N et renvoyant un nuage de points de coordonnées

$$\left(n, \frac{s_{n+1}}{s_n} \right) \quad \text{avec } 1 \leq n \leq N.$$

4. Expliquer / Interpréter le script ci-dessous.

```
from fractions import Fraction
a = Fraction(1,2)
b = Fraction(4,1)
c = a + 1/b
print(c.denominator)
print(c.numerator)
```

5. Écrire une fonction A2C prenant en argument une liste

$$A = [a_0, \dots, a_p]$$

calcule la fraction

$$F = a_p + \frac{1}{\dots + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_0}}}$$

puis renvoie le couple formé du dénominateur et du numérateur de cette fraction.

OB-MATH2-13, Solution

Solution de l'exercice de math

1. Comme a , b et c sont de module 1, on a :

$$\frac{1}{a} = \bar{a}, \quad \frac{1}{b} = \bar{b}, \quad \frac{1}{c} = \bar{c}$$

Ainsi,

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \bar{a} + \bar{b} + \bar{c} = \overline{a+b+c} = \bar{1} = 1$$

ce qui conclut.

2. Soit P un polynôme de degré 3 dont les racines sont a , b et c . À une constante multiplicative non nulle près, on peut écrire :

$$P(X) = (X - a)(X - b)(X - c)$$

En développant, on obtient :

$$P(X) = X^3 - (a + b + c)X^2 + (ab + ac + bc)X - abc = X^3 - X^2 + (ab + ac + bc)X - abc$$

Puisque :

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1 \iff \frac{bc + ac + ab}{abc} = 1 \iff ab + ac + bc = abc$$

on a $ab + ac + bc = abc$ donc

$$P(X) = X^3 - X^2 + abcX - abc$$

ce qui, après factorisation, donne :

$$P(X) = X^2(X - 1) + abc(X - 1) = (X - 1)(X^2 + abc)$$

Ainsi, 1 est une racine de P . Comme les racines de P sont a , b et c , l'un des trois nombres a , b ou c vaut 1. Supposons par exemple que $a = 1$. Alors, puisque $a + b + c = 1$, on a aussi $1 + b + c = 1$, soit

$$c = -b$$

Ainsi, une des trois racines de P vaut 1 et les deux autres sont deux nombres complexes opposés de module 1.

Solution de l'exercice d'info

1. On obtient successivement

$$s_0 = 0, \quad s_1 = 1, \quad s_2 = s_1 = 1, \quad s_3 = s_2 + s_1 = 2, \quad s_4 = s_2 = 1, \quad s_5 = s_3 + s_2 = 3, \quad s_6 = s_3 = 2, \quad s_7 = s_4 + s_3 = 3.$$

2. **def** LS(N) :

```
s = [0 for _ in range(N)]
s[1] = 1
k = 2
while k < N:
    if k%2 == 0:
        s[k] = s[k//2]
    else:
        s[k] = s[(k-1)//2] + s[(k+1)//2]
    k += 1
return s
```

3. **def** trace(N) :

```
e = [n for n in range(1, N+1)]
aux = LS(N+2)
r = [aux[k+1]/aux[k] for k in range(1, N+1)]
plt.plot(e, r, 'xb')
plt.show()
```

4. Le module `fractions` permet de manipuler des nombres rationnels sous forme de fractions exactes. Le script définit

$$a = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad b = \frac{4}{1} = 4.$$

Puis il calcule

$$c = a + \frac{1}{b} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

L'instruction `c.denominator` affiche le dénominateur de `c`, soit 4, tandis que `c.numerator` affiche son numérateur, soit 3.

5. `def A2C(A):`

```
F = Fraction(A[0], 1)
```

```
for a in A[1:]:
```

```
    F = a + Fraction(1, F)
```

```
return F.denominator, F.numerator
```