



Préparation à l'oral

Math II
Semaine du 15 Juin

Sujet OB-MATH2-14

Exercice de mathématiques

Pour $n \geq 2$ entier et pour θ réel on définit les polynômes :

$$P(X) = \sin \theta X^n - \sin(n\theta) X + \sin((n-1)\theta) \quad \text{et} \quad Q(X) = X^2 - 2 \cos \theta X + 1.$$

- Déterminer les racines de Q .
- Montrer que Q divise P puis calculer le quotient de la division de P par Q .

Exercice d'informatique

On rappelle que si $\mu \in \mathbb{R}_+^*$ et $X \sim \mathcal{P}(\mu)$, alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{P}(X = n) = e^{-\mu} \frac{\mu^n}{n!}$$

- Écrire une fonction $\mathbf{V}(\mu, n)$ qui renvoie la probabilité

$$\mathbf{P}(X = n)$$

lorsque X suit une loi de Poisson de paramètre μ .

- Écrire une fonction $\mathbf{Vp}(\mu, n)$ qui renvoie le vecteur

$$(\mathbf{P}(X = i))_{0 \leq i \leq n}$$

lorsque X suit une loi de Poisson de paramètre μ .

- Exécuter puis expliquer les lignes suivantes :

```
from numpy import random as rd
T = rd.choice([1,0,0,0], (8,5))
print(T)
```

- Écrire une fonction $\mathbf{freq}(m, k, N)$ qui simule N expériences indépendantes, chacune consistant en m épreuves de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{k}$, et qui renvoie le vecteur des fréquences

$$(f_i)_{0 \leq i \leq m},$$

où f_i désigne la fréquence d'apparition de i succès.

- Pour chacun des couples

$$(m, k) \in \{(20, 5), (100, 20), (500, 100)\},$$

tracer sur un même graphique :

✗ les probabilités

$$(\mathbf{P}(X = i))_{0 \leq i \leq m} \quad \text{où} \quad X \sim \mathcal{P}\left(\frac{m}{k}\right).$$

✗ les fréquences obtenues avec la fonction \mathbf{freq} pour $N = 10\,000$

puis commenter les résultats obtenus.

OB-MATH2-14, Solution

Solution de l'exercice de math

1. On a, de façon évidente, $Q(X) = (X - \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta$. Ainsi :

$$Q(z) = 0 \iff (z - \cos \theta)^2 = -\sin^2 \theta \iff z - \cos \theta = \pm i \sin \theta \iff z = \cos \theta \pm i \sin \theta$$

Les racines de Q sont donc $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$.

2. On a :

$$P(e^{i\theta}) = \sin \theta e^{in\theta} - \sin(n\theta) e^{i\theta} + \sin((n-1)\theta).$$

Avec la formule $\sin a = \frac{e^{ia} - e^{-ia}}{2i}$, on obtient :

$$\begin{aligned} 2iP(e^{i\theta}) &= (e^{i\theta} - e^{-i\theta}) e^{in\theta} - (e^{in\theta} - e^{-in\theta}) e^{i\theta} + (e^{i(n-1)\theta} - e^{-i(n-1)\theta}) \\ &= e^{i(n+1)\theta} - e^{i(n-1)\theta} - e^{i(n+1)\theta} + e^{-i(n-1)\theta} + e^{i(n-1)\theta} - e^{-i(n-1)\theta} = 0 \end{aligned}$$

Par conséquent $P(e^{i\theta}) = 0$ et $e^{i\theta}$ est bien une racine de P . Comme P est à coefficient réels, $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$ est aussi racine de P .

Les racines de Q étant aussi racines de P , Q divise P .

Comme Q est de degré 2 et que P est de degré au plus n , on cherche le quotient R de degré au plus $n-2$, soit :

$$R(X) = a_0 X^{n-2} + a_1 X^{n-3} + \dots + a_{n-3} X + a_{n-2}$$

où les coefficients a_0, a_1, \dots, a_{n-2} sont à déterminer de façon que $P(X) = Q(X)R(X)$. En développant le produit $Q(X)R(X)$ et en identifiant les coefficients dominants on obtient $a_0 = \sin \theta$ et le coefficient de X^{n-1} dans $Q(X)R(X)$ vaut $a_1 - 2 \cos \theta a_0$ et comme P n'a pas de terme en X^{n-1} , on a $a_1 - 2 \cos \theta a_0 = 0$, soit

$$a_1 = 2 \cos \theta \sin \theta = \sin(2\theta).$$

De même, le coefficient de X^{n-2} dans $Q(X)R(X)$ vaut $a_2 - 2 \cos \theta a_1 + a_0$ et P n'a pas de terme en X^{n-2} , donc $a_2 - 2 \cos \theta a_1 + a_0 = 0$ et ainsi :

$$a_2 = 2 \cos \theta a_1 - a_0 = 2 \cos \theta \sin(2\theta) - \sin \theta$$

Mais $2 \cos \theta \sin(2\theta) = \sin(3\theta) + \sin \theta$, donc

$$a_2 = \sin(3\theta).$$

Plus généralement, les coefficients vérifient, pour $k \geq 2$, la relation

$$a_k - 2 \cos \theta a_{k-1} + a_{k-2} = 0.$$

Autrement dit,

$$a_k = 2 \cos \theta a_{k-1} - a_{k-2}.$$

En poursuivant avec les coefficients suivants, on peut conjecturer que $a_k = \sin((k+1)\theta)$. Pour le prouver, on peut remarquer les a_k et les $\sin((k+1)\theta)$ vérifient la même relation de récurrence; en effet,

$$\sin((k+1)\theta) - 2 \sin(k\theta) \cos \theta + \sin((k-1)\theta) = 0.$$

Et comme $a_0 = \sin \theta$ et $a_1 = \sin(2\theta)$, on obtient par récurrence, pour tout $k \in \{0, 1, \dots, n-2\}$,

$$a_k = \sin((k+1)\theta)$$

Ce qui permet de conclure que

$$R(X) = \sin \theta X^{n-2} + \sin(2\theta) X^{n-3} + \dots + \sin((n-2)\theta) X + \sin((n-1)\theta) = \sum_{k=1}^{n-1} \sin(k\theta) X^{n-1-k}$$

On vérifie sans peine que ce polynôme convient bien.

Remarque. Si $\sin \theta = 0$, alors tous les $\sin(k\theta)$ sont nuls donc $P = 0$ et la formule donne bien un quotient nul.

Solution de l'exo d'info

```

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

1. def V(mu, n):
    p = np.zeros(n+1)
    p[0] = np.exp(-mu)
    for k in range(n):
        p[k+1] = (mu/(k+1))*p[k]
    return p[-1]

2. def Vp(mu, n):
    p = np.zeros(n+1)
    p[0] = np.exp(-mu)
    for k in range(n):
        p[k+1] = (mu/(k+1))*p[k]
    return p

3. from numpy import random as rd
T = rd.choice([1,0,0,0], (8,5))
print(T)

4. def freq (k,m,N):
    L = [0 for i in range(k)]
    L[0] = 1
    T = rd.choice(L, (N,m))
    S = np.sum(T,axis = 1)
    F = np.zeros((m+1))
    for k in S:
        F[k] += 1
    return F/N

5. m = 20
k = 5
N = 10000
X = np.arange(0,m+1)
Y = Vp(m/k,m)
Z = freq(k,m,N)
plt.plot(X,Y,color = 'r')
plt.plot(X,Z,color = 'b')
plt.show()

m = 100
k = 20
N = 10000
X = np.arange(0,m+1)
Y = Vp(m/k,m)
Z = freq(k,m,N)
plt.plot(X,Y,color = 'r')
plt.plot(X,Z,color = 'b')
plt.show()

m = 500
k = 100
N = 10000
X = np.arange(0,m+1)

```

```
Y = Vp(m/k, m)
Z = freq(k, m, N)
plt.plot(X, Y, color = 'r')
plt.plot(X, Z, color = 'b')
plt.show()
```

On voit que une loi de Poisson de paramètre m/k peut être approchée par une loi de binomiale de paramètre $(m, 1/k)$ si m est grand et $1/k$ est petit.