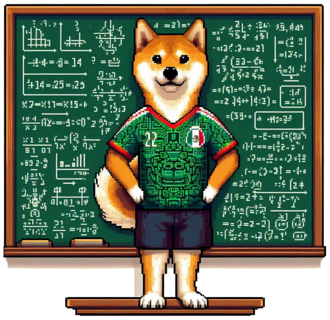
Mathématiques & Informatique - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
Lycée Voltaire, Paris 11e.



Préparation à l'oral

Math-Info : Math 2
Semaine du 8 Juin

Sujet OB-MATH2-3

Exercice de mathématiques

1. Montrer $\forall x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{1}{1+e^{-2x}} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k e^{-2kx} + \dfrac{(-1)^n e^{-2nx}}{1+e^{-2x}}$.
2. En déduire $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{ch}(x)} = 2\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{2k+1} + I_n$, où I_n est une intégrale telle que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.
3. Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$.
4. Quel est le domaine de définition de la fonction $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2k+1} x^k$ où x est un réel?

Exercice d'informatique

Une méthode pour estimer numériquement l'aire du disque de centre O et de rayon 1 est la suivante : on tire au hasard N points de coordonnées $(x, y) \in [-1, 1] \times [-1, 1]$; parmi ces points, on compte le nombre i de ceux qui appartiennent au disque ; on admet que i/N est une approximation du rapport de l'aire du disque par l'aire du carré.

1. Observer et expliquer ce que fait le code suivant :

```python
from numpy.random import rand
Lpts = 2*rand(8,2) - 1
print(Lpts)
```

2. Écrire une fonction `estim1` d'argument N qui renvoie une valeur approchée de l'aire du disque, calculée selon le procédé indiqué ci-dessus.
3. Écrire une fonction `estim2` analogue à `estim1` qui fait tracer en plus les points tirés dans le carré ; ceux dans le disque avec une couleur, et ceux à l'extérieur avec une autre couleur. *Pour obtenir un repère orthonormé, on pourra utiliser l'instruction* `axis("equal")` *grâce au module* `matplotlib.pyplot` *de* `Python`.

On s'intéresse maintenant à l'aire du domaine $\mathcal{D}$ d'équation : $(x^2 + y^2)^2 \leqslant x^3$.

4. Faire tracer l'allure de la frontière du domaine $\mathcal{D}$ après avoir résolu «*à la main*» dans $\mathbb{R}$ l'équation en y, $(x^2 + y^2)^2 = x^3$.
5. En déduire que le domaine $\mathcal{D}$ est contenu dans un rectangle que l'on déterminera.
6. À l'aide de la méthode précédente, estimer l'aire du domaine $\mathcal{D}$ et faire afficher avec des couleurs différentes les points tirés, selon qu'ils seront dans $\mathcal{D}$ ou non.

Solution du sujet OB-MATH2-2

Math (Math II 2019)

1. Il suffit de reconnaître la somme des termes d'une suite géométrique :

$$\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k e^{-2kx} = \sum_{k=0}^{n-1}\left(-e^{-2x}\right)^k = \frac{1-\left(-e^{-2x}\right)^n}{1-\left(-e^{-2x}\right)} = \frac{1}{1+e^{-2x}} - \frac{(-1)^n e^{-2nx}}{1+e^{-2x}}.$$

2. L'intégrale est impropre en $+\infty$. On remarque déjà

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{ch}(x)} = \int_0^{+\infty}\frac{2}{e^x+e^{-x}}\mathrm{d}x = 2\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x}}{1+e^{-2x}}\mathrm{d}x.$$

Or on a $\frac{e^{-x}}{1+e^{-2x}} \underset{+\infty}{\sim} e^{-x}$, et on sait que $\int_*^{+\infty} e^{-x}\mathrm{d}x$ converge. Le théorème de comparaison des équivalents montre alors que $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{ch}(x)}$ converge.

En utilisant la question précédente on peut alors écrire :

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{ch}(x)} &= 2\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x}}{1+e^{-2x}}\mathrm{d}x \\
&= 2\int_0^{+\infty} e^{-x}\left(\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k e^{-2kx} + \frac{(-1)^n e^{-2nx}}{1+e^{-2x}}\right)\mathrm{d}x \\
&= 2\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^{+\infty}(-1)^k e^{-(2k+1)x}\mathrm{d}x + 2\int_0^{+\infty}\frac{(-1)^n e^{-(2n+1)x}}{1+e^{-2x}}\mathrm{d}x \\
&= 2\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\left[\frac{-1}{2k+1}e^{-(2k+1)x}\right]_0^{+\infty} + I_n \\
&= 2\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{2k+1} + I_n
\end{aligned}$$

où on a posé $I_n = 2(-1)^n\int_0^{+\infty}\frac{e^{-(2n+1)x}}{1+e^{-2x}}\mathrm{d}x$. Il ne reste donc plus qu'à montrer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$. On écrit pour cela :

$$|I_n| = 2\int_0^{+\infty}\frac{e^{-(2n+1)x}}{1+e^{-2x}}\mathrm{d}x \leq 2\int_0^{+\infty}\frac{e^{-(2n+1)x}}{1+0}\mathrm{d}x = 2\left[\frac{-1}{2n+1}e^{-(2n+1)x}\right]_0^{+\infty} = \frac{2}{2n+1}.$$

Et comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2}{2n+1} = 0$, on en déduit le résultat.

3. En passant à la limite dans la question précédente il vient

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{ch}(x)},$$

ce qui prouve au passage la convergence de la série. On peut alors calculer l'intégrale via le changement de variable $u = e^x$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{ch}(x)} = \int_0^{+\infty}\frac{e^x}{e^{2x}+1}\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty}\frac{1}{u^2+1}\mathrm{d}u = [\arctan u]_1^{+\infty} = \frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

4. La règle de d'Alembert permet de montrer que le rayon de convergence est $R = 1$. Donc f est déjà définie sur $]-1,1[$, et elle n'est pas définie sur $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$. On vient de plus de prouver la convergence en $x=-1$. Mais en $x = 1$ la série diverge, puisque $f(1) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2k+1}$ a pour terme général $\frac{1}{2k+1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2k}$ et ce dernier est le terme général d'une série divergente (par Riemann). Le domaine de définition de f est donc $[-1,1[$.

Enfin, on reconnait en f le développement en série entière de arctan, de sorte que $\forall x \in]-1,1[,\ \arctan x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2k+1}x^k$.

Et on a prouvé à la question 3 que cette égalité est encore valable en $x = -1$.

Info (Math II 2018)

1. Cela génère un tableau aléatoire de taille 8×2 de flottants dans $[-1, 1]$.

2.
```
def estim1(N):
    Lpts = 2*rand(N,2)-1 # Tirage aléatoire des N points du carré [-1,1]x[-1,1]
    i = 0 # Nombre de points du disque unité
    for p in Lpts:
        if p[0]**2+p[1]**2 <= 1: # Test d'appartenance au disque
            i += 1
    return 4*(i/N)
```

3.
```
def estim2(N):
    Lpts = 2*rand(N,2)-1 # Tirage aléatoire des N points du carré [-1,1]x[-1,1]
    i = 0 # Nombre de points du disque unité
    Dx = [ ] # liste des abscisses des points de D
    Dy = [ ] # liste des ordonnées des points de D
    Ex = [ ] # liste des abscisses des points extérieurs à D
    Ey = [ ] # liste des ordonnées des points extérieurs à D
    for p in Lpts:
        if p[0]**2+p[1]**2 <= 1: # Test d'appartenance au disque
            i += 1
            Dx.append(p[0])
            Dy.append(p[1])
        else:
            Ex.append(p[0])
            Ey.append(p[1])
    plt.plot(Dx,Dy,'o',color='r')
    plt.plot(Ex,Ey,'+',color='b')
    plt.axis('equal')
    plt.show()
```

4. les points de la frontière de D sont tels que $(x^2+y^2)^2 = x^3$, ce qui impose $x \geq 0$ puis $y^2 = \sqrt{x^3} - x^2$ et conduit à tracer les fonctions $x \mapsto (x^{3/2} - x^2)^{1/2}$ et $x \mapsto -(x^{3/2} - x^2)^{1/2}$.

```
def f1(x):
    return np.sqrt(x**(3/2)-x**2)
def f2(x):
    return -np.sqrt(x**(3/2)-x**2)
X = np.linspace(0,1,1000)
Y1 = f1(X)
Y2 = f2(X)
plt.plot(X,Y1)
plt.plot(X,Y2)
plt.axis('equal')
plt.show()
```

5. D semble être contenu dans le rectangle $[0, 1] \times [-1/3, 1/3]$ mais on montre avec un calcul à la main que D est assurément contenu dans $[0, 1] \times [-1, 1]$, comme D est symétrique par rapport à l'axe (Ox), on peut s'intéresser à l'estimation de l'aire de la partie de D située dans le carré $[0, 1] \times [0, 1]$ et multiplier par deux...

6.
```
def estim1_D(N):
    Lpts = rand(N,2) # Tirage aléatoire des N points du carré [0,1]x[0,1]
    i = 0 # Nombre de points dans D
    for p in Lpts:
        if (p[0]**2+p[1]**2)**2 <= p[0]**3: # Test d'appartenance au disque
            i += 1
    return 2*(i/N)
```

```
def estim2_D(N):
    Lpts = rand(N,2) # Tirage aléatoire des N points du carré [-1,1]x[0,1]
    i = 0 # Nombre de points du disque unité
    Dx = [] # liste des abscisses des points de D
    Dy = [] # liste des ordonnées des points de D
    Ex = [] # liste des abscisses des points exterieurs à D
    Ey = [] # liste des ordonnées des points exterieurs à D
    for p in Lpts:
        if (p[0]**2+p[1]**2)**2 <= p[0]**3: # Test d'appartenance au disque
            i += 1
            Dx.append(p[0])
            Dy.append(p[1])
        else:
            Ex.append(p[0])
            Ey.append(p[1])
    plt.plot(Dx,Dy,'o',color='r')
    plt.plot(Ex,Ey,'+',color='b')
    plt.axis('equal')
    plt.show()
```