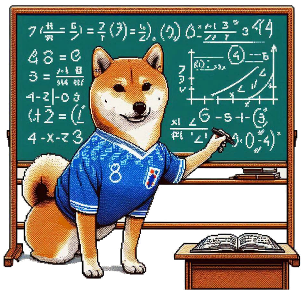
Mathématiques PT. 2025 - 2026

Mathématiques & Informatique - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
Lycée Voltaire, Paris 11e.



Préparation à l'oral

Math-Info : Math 2
Semaine du 8 Juin

Sujet OB-MATH2-5

Exercice de mathématiques

Soit A une matrice carrée réelle de taille 2 telle que $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Ker}(A)$.

1. Déterminer les dimensions de $\mathrm{Ker}(A)$ et de $\mathrm{Im}(A)$.

2. Déterminer les valeurs propres de A. A est-elle diagonalisable?

3. Montrer que A est semblable à une matrice triangulaire supérieure.

4. Montrer que A peut s'écrire :

$$A = \lambda \begin{pmatrix} -ac & a^2 \\ -c^2 & ac \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad (a, c, \lambda) \in \mathbb{R}^3.$$

Exercice d'informatique

Un nombre entier $n \in \mathbb{N}^*$ est dit de type `H` s'il peut s'écrire

$$n = 2^k 3^\ell 5^m,$$

où k, ℓ, m sont des entiers naturels.

1. Écrire une fonction `HQ` qui prend en argument un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et renvoie `True` si n est de type `H`.

2. Écrire une fonction `TH1` qui prend en argument un entier $N \in \mathbb{N}^*$ et renvoie la liste des N premiers nombres de type `H`, en utilisant la fonction précédente.

On souhaite déterminer différemment la liste L des N premiers entiers de type `H`.
Pour cela, on initialise la liste à `[1]` et on remarque que, pour $n \geq 1$, le $(n+1)-$ème éléments est un multiple particulier d'un des n premiers éléments de L : il existe $k \in [\![0, n-1]\!]$, tel que $L[n] = pL[k]$ pour un certain $p \in \{2, 3, 5\}$.

3. Écrire alors une fonction `TH2` qui renvoie, en utilisant la méthode décrite ci-dessus, la liste des N premiers entiers de type `H`. On veillera à éviter les doublons et à renvoyer les termes triés dans l'ordre croissant.

4. Quel est le coût de chacune des fonctions `TH1` et `TH2` ?

Solution du sujet OB-MATH2-5

Math (Math II 2025)

1. $\mathrm{Im}(A)$ et $\mathrm{Ker}(A)$ sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ qui est de dimension 2. Par théorème du rang, on a $\dim(\mathrm{Im}(A)) + \dim(\mathrm{Ker}(A)) = 2$ et par égalité, on a donc $\dim(\mathrm{Ker}(A)) = \dim(\mathrm{Im}(A)) = 1$.

2. Il découle de l'égalité $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Im}(A)$ que $A^2 = 0$. La seule valeur propre possible est donc 0 qui est bien valeur propre car A n'est pas inversible (son noyau est de dimension 1). La amtrice admet donc une seule valeur propre, son unique sous-espace propre est de dimension $1 \neq 2$ et donc A n'est pas diagonalisable.

3. Il suit de la question précédente que $\chi_A(X) = X^2$ (c'est un polynôme unitaire de degré 2 ayant pour seul racine 0) donc il est scindé : la matrice A est trigonalisable, ce qui veut dire qu'elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure.

4. La matrice T triangulaire supérieure est nécessairement de la forme $T = \begin{pmatrix} 0 & \\ mu & \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ car 0 est la seule valeur propre, avec $\mu \in \mathbb{R}^*$.. Notons alors

$$P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

une matrice de passage (donc inversible, ce qui implique $ad - bc \neq 0$) telle que $A = PDP^{-1}$. Un calcul rapide donne

$$P^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

pour obtenir

$$A = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \mu \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{\mu}{ad-bc}\begin{pmatrix} -ac & a^2 \\ -c^2 & ac \end{pmatrix}$$

En posant $\lambda = \dfrac{\mu}{ad-bc}$ qui décrit $\mathbb{R}$ lorsque μ décrit $\mathbb{R}$, on a le résultat souhaité.

Info (Math II 2024)

1.

```python
def HQ(n):
    assert n>0 # renvoie une erreur si n <=0
    for p in [2, 3, 5]:
        while n % p == 0: # tant que p divise n
            n //= p # on travaille sur le quotient
    return n == 1
```

2. On ajoute les termes un par un s'ils le test de Hamming écrit à la question précédente est concluant, jusqu'à avoir obtenu une liste de N termes.

```python
def TH1(N):
    L = [ ]
    i = 1
    while len(L) < N:
        if HQ(i):
            L.append(i)
        i += 1
    return L
```

3. On veut donc à chaque étape ajouter un multiple de 2, de 3 ou de 5 d'un nombre déjà ajouté. On introduit donc les listes des indices i_2, i_3 et i_5 des multiples de 2, 3 et 5.

```python
def TH2(n):
    L = [1]
    i2 = i3 = i5 = 0
    while len(L) < n:
        # prochains candidats à ajouter
        next2 = L[i2] * 2
        next3 = L[i3] * 3
        next5 = L[i5] * 5
```

```
        # on ajoute le plus petit des trois
        nextL = min(next2, next3, next5)
        L.append(nextL)
        # on actualise les indices des multiples utilisés
        if nextL == next2:
            i2 += 1
        if nextL == next3:
            i3 += 1
        if nextL == next5:
            i5 += 1
    return L
```

4. ✗ Chaque test de Hamming effectue $k+\ell+m=O(\ln(k))$ divisions du nombre k. Mais on ne sait pas précisément combien de tests on effectue car les nombres de Hamming deviennent de plus en plus rares. Il faudrait pour cela connaître la valeur (ou une estimation) du $n-$ième (plus petit) nombre de Hamming H_n. On peut déjà dire que dans ce cas, le coût est $O(\ln(n)H_n)$.
   ✗ On ajoute au fur et à mesure terme par terme. Chaque opération d'ajout se fait en temps constant, on a donc un coût en $O(n)$.

Remarque. Il est raisonnable de penser que le sujet n'en attend pas plus.

On peut voir[1] que le nombre κ_N de nombres de Hamming inférieur ou égal à N est que $\kappa_N \sim \dfrac{\ln(N)^3}{\ln(2)\ln(3)\ln(5)}$. Donc

$$n \sim \frac{\ln(H_n)^3}{\ln(2)\ln(3)\ln(5)} \Longrightarrow \ln(H_n) \sim cn^{1/3},$$

où c est une constante. On en peut pas composer les équivalents, mais le coût de la deuxième fonction est clairement meilleur.

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Regular_number