

Préparation à l'oral

*Math-Info : Math 2
Semaine du 8 Juin*

Sujet OB-MATH2-6

Exercice de mathématiques

On se place dans \mathbb{R}^2 muni du repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

On note $M_0(t)$ le point de coordonnées $(t, 0)$, et R la rotation vectorielle d'angle $-\pi/2$.

On considère les trajectoires vérifiant en tout point $M(t)$:

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}(t) = R\left(\overrightarrow{M_0(t)M(t)}\right), \text{ avec } M(0) = (0, k).$$

1. Déterminer les coordonnées de $M(t)$.
2. Soit Γ_k la trajectoire de $M(t)$ passant par $M(0) = (0, k)$. Déterminer les valeurs de k pour lesquelles Γ_k admet des points stationnaires.
3. Tracer Γ_2 .

Exercice d'informatique

On dispose des lignes de code ci-dessous.

```
from numpy import array, zeros, dot
M=array([[1, 2], [3, 4], [5,6]])
N=zeros((2,2))
print(M,N)
N[1, 0], N[0, 1]=1,-1
print(dot(M, N))
```

1. Expliquer le programme.
2. Créer une fonction `ident` qui renvoie pour n la matrice identité de taille n .
3. Créer une fonction `trace` qui calcul la trace d'une matrice carrée quelconque.

On introduit un code itératif en langage mathématique (connu sous le nom d'*Algorithme de Souriau*) qu'on admet permettre de calculer les coefficients du polynôme caractéristique χ_A d'une matrice A .

Plus précisément, notant

$$\chi_A(X) = X^n - \sum_{k=1}^n p_k \cdot X^{n-k},$$

l'algorithme, qui nécessite le calcul d'une suite de matrices intermédiaires, est le suivant :

Initialisation

$$p_0 = 1$$

$$B_0 = A$$

Pour k allant de 1 à n :

$$\rightarrow p_k = \frac{1}{k} \text{Tr}(B_{k-1})$$

$$\rightarrow B_k = A(B_{k-1} - p_k I_n).$$

4. Écrire une fonction `Fpc` qui donne dans un format adéquat le polynôme caractéristique d'une matrice.

Solution du sujet OB-MATH2-6

Math (Math II 2024)

1. Posons $M(t) = (x(t), y(t))$ et $M_0(t) = (t, 0)$.

La rotation vectorielle d'angle $-\pi/2$ transforme un vecteur (u, v) en $R(u, v) = (v, -u)$. Or

$$\overrightarrow{M_0(t)M(t)} = (x(t) - t, y(t)).$$

La relation

$$\frac{d}{dt} \overrightarrow{OM}(t) = R(\overrightarrow{M_0(t)M(t)})$$

s'écrit donc

$$(x'(t), y'(t)) = (y(t), t - x(t)).$$

On obtient le système

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = t - x, \end{cases} \quad x(0) = 0, \quad y(0) = k.$$

En dérivant la première équation, on obtient $x'' = y' = t - x$ soit $x'' + x = t$. L'équation homogène associée a pour solution générale $x_h(t) = A \cos t + B \sin t$. On cherche une solution particulière sous la forme $x_p(t) = at + b$. Au final, on obtient que les solutions de l'équa diff sont

$$x(t) = A \cos t + B \sin t + t.$$

Comme $x(0) = 0$, on obtient $A = 0$, donc $x(t) = B \sin t + t$ puis $y(t) = x'(t) = B \cos t + 1$. La condition initiale $y(0) = k$ donne $B = k - 1$. Finalement,

$$\begin{cases} x(t) = t + (k - 1) \sin t, \\ y(t) = 1 + (k - 1) \cos t. \end{cases}$$

2. Les points stationnaires correspondent aux instants où $M'(t) = 0$. Il faut donc résoudre

$$\begin{cases} 1 + (k - 1) \cos t = 0, \\ (k - 1) \sin t = 0. \end{cases}$$

✗ Si $k = 1$. Alors $M'(t) = (1, 0)$ et il n'y a pas de point stationnaire.

✗ Si $k \neq 1$. La seconde équation donne $\sin(t) = 0$ (donc $t = n\pi, n \in \mathbb{Z}$), ce qui donne ensuite $1 + (k - 1)(-1)^n = 0$. Si n est pair, on trouve nécessairement $k = 0$. Si n est impair, on trouve $k = 2$.

Bilan, il n'y a de point stationnaire que pour $k = 0$ ou $k = 2$.

3. Observant que $M(t + 2\pi) = M(t) + 2\pi\vec{i}$, on peut restreindre l'étude à un intervalle de longueur 2π puis compléter le tracé par translation de vecteur $2\pi\vec{i}$. De plus $x(-t) = -x(t)$ et $y(-t) = y(t)$ donc on peut restreindre à $[0, \pi]$ et compléter le tracé par symétrie d'axe (Oy) .

Le point critique $M(\pi) = (\pi, 0)$ est un point de rebroussement de première espèce de demi-tangente verticale. En effet

$$x(\pi + t) = t + \pi + \sin(t + \pi) = \pi + t - \sin(t) = \pi + \frac{t^3}{6} + o(t^3)$$

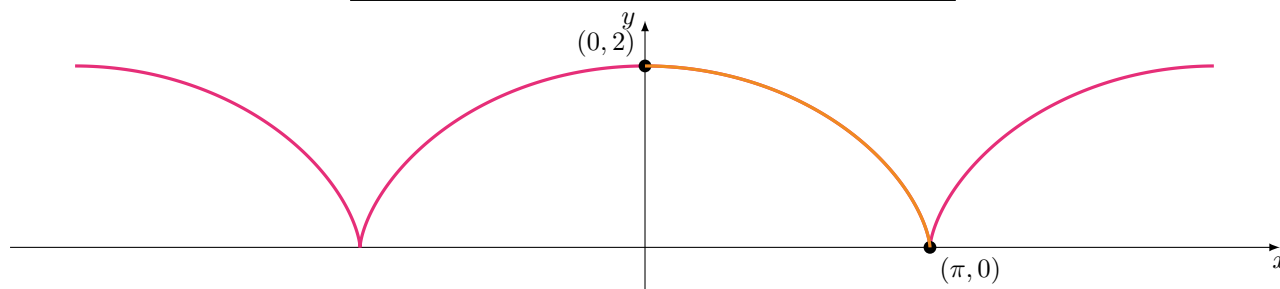
et

$$y(\pi + t) = 1 + \cos(t + \pi) = 1 - \cos(t) = +\frac{t^2}{2} + o(t^3)$$

donc les entiers caractéristiques sont bien $p = 2$ et $q = 3$.

Les tableaux de variations sont :

t	0	π
$x'(t) = 1 + \cos t$		+
x	0	π
$y'(t) = -\sin t$	0	-
y	2	0



Info (Math II 2024)

1. ✗ M est une matrice 3×2 :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

- ✗ N est une matrice nulle 2×2 :

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- ✗ La ligne :

$$N[1, 0], N[0, 1] = 1, -1$$

modifie la matrice N, qui devient :

$$N = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- ✗ Le produit matriciel `dot(M, N)` calcule $M \cdot N$, produit d'une matrice 3×2 avec une matrice 2×2 :

$$M \cdot N = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -3 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}$$

2. On peut proposer le code suivant

```
def ident(n) :
    M=[[0]*n]*n
    M=np.array(M)
    for i in range(n):
        M[i,i]=1
    return M
```

3. On propose le code suivant

```
def trace(M):
    return sum(M[i, i] for i in range(len(M)))
```

4. On suit l'algorithme ; on renvoie le polynôme sous la forme d'une liste de ses coefficients dans l'ordre des indices décroissants.

```
def Fpc(A):  
    n = len(A)  
    I = ident(n)  
    B = A.copy()  
    coeffs = [1] # p0 = 1  
    for k in range(1, n + 1):  
        pk = trace(B) / k  
        coeffs.append(-pk) # On stocke les -p_k directement  
        B = A @ B - pk * I  
    return coeffs
```