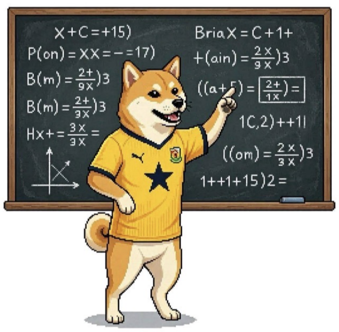
Mathématiques & Informatique - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
Lycée Voltaire, Paris 11e.



Préparation à l'oral

Math II
Semaine du 15 Juin

Sujet OB-MATH2-8

Exercice de mathématiques

On considère l'application définie sur $E = \mathbb{R}_3[X]$ par

$$\forall P \in E, \quad u(P) = P(1)X(X+1) + P(-1)X(X-1)$$

1. Montrer que u est un endomorphisme.
2. Montrer que la famille $\Big(X(X+1), X(X-1)\Big)$ est une base de l'image de u.
3. Trouver une base du noyau de u.
4. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Im}(u)$.
5. En déduire une base de E dans laquelle la matrice de u est diagonale.

Exercice d'informatique

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres entiers dépendant de sa valeur initiale $u_0 \in \mathbb{N}^*$ et définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \begin{cases} u_n/4 \text{ si } u_n \text{ est un multiple de } 4 \\ (3u_n+2)/2 \text{ sinon (division entière)} \end{cases}$$

1. À l'aide notamment des instructions `plot` et `show` de la bibliothèque `mathplotlib.pyplot`, représenter graphiquement les 30 premiers termes de la suite pour $u_0 = 25$, puis pour $u_0 = 37$.

2. On conjecture que pour tout entier naturel u_0 non nul, il existe un plus petit entier n, appelé «durée de vol», tel que $u_n = 1$.
Que se passe-t-il s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n = 1$?

3. Écrire une fonction `vol` d'argument un entier d, renvoyant la durée de vol lorsque $u_0 = d$ ainsi que la valeur maximale atteinte par la suite, que l'on appellera «altitude».

4. Représenter cette altitude en fonction du point de départ d, pour les valeurs de $d \in [\![1, 1000]\!]$.

5. Pour quelles valeurs de valeurs de $d \in [\![1, 1000]\!]$, atteint-on une altitude supérieure à 100000 ? Donner alors les valeurs de d, de la durée de vol et de l'altitude.

6. Vérifier que ces valeurs correspondent aussi à des durées de vol maximales.

OB-MATH2-8, Solution

Solution de l'exercice de math

1. On sait que l'application $P \mapsto P(1)$ (resp. $P \mapsto P(-1)$) est une application linéaire de E dans $\mathbb{R}$ et, puisque $X(X+1)$ (resp. $X(X-1)$) est dans E, l'application $P \mapsto P(1)X(X-1)$ (resp. $P \mapsto P(-1)X(X-1)$) est un endomorphisme de E.
Ainsi u un endomorphisme de E en tant que somme de deux endomorphismes de E.

2. Par construction on a :
$$\forall P \in E, \quad u(P) \in \operatorname{Vect}(X(X+1), X(X-1))$$
On en déduit que $\operatorname{Im}(u) \subset \operatorname{Vect}(X(X+1), X(X-1))$. Pour établir l'inclusion réciproque il suffit de justifier que $X(X+1) \in \operatorname{Im}(u)$ et que $X(X-1) \in \operatorname{Im}(u)$. Soit $P = X+1$ de sorte que $P(1) = 2$ et $P(-1) = 0$. Ainsi :
$$u(P) = 2X(X+1) \quad \text{soit} \quad X(X+1) = u\left(\frac{P}{2}\right)$$
De même en posant $Q = X-1$ on constate que :
$$u\left(-\frac{Q}{2}\right) = X(X-1)$$
Les polynômes $X(X+1)$ et $X(X-1)$ sont donc dans l'image de u, ainsi :
$$\operatorname{Im}(u) = \operatorname{Vect}\Big(X(X+1), X(X-1)\Big)$$
Il reste à vérifier que ces deux polynômes forment une famille libre. Ils ne sont pas proportionnels car l'un s'annule en 1 et l'autre non : ils sont donc linéairement indépendants. Étant libre et génératrice, la famille $\Big(X(X+1), X(X-1)\Big)$ est donc bien une base de l'image de u.

3. Soit $P \in E$. On a, par liberté de la famille de la question précédente,
$$\begin{aligned} u(P) = 0 &\iff u(P) = P(1)X(X+1) + P(-1)X(X-1) = 0 \\ &\iff P(1) = P(-1) = 0 \iff P \text{ est divisible par } (X^2-1) \end{aligned}$$
On en déduit que
$$\operatorname{Ker}(u) = \Big\{(X^2-1)\,Q,\ Q \in \mathbb{R}_1[X]\Big\}$$
On sait, par le théorème du rang, que $\operatorname{Ker}(u)$ est de dimension 2; par ailleurs X^2-1 et $X\left(X^2-1\right)$ sont dans $\operatorname{Ker}(u)$, d'après ce qui précède. Comme la famille à deux éléments $\left(X^2-1, X(X^2-1)\right)$ est étagée en degré, elle est libre; c'est donc une base de $\operatorname{Ker}(u)$.

4. Toujours par le théorème du rang, on sait que:
$$\dim(E) = \dim(\operatorname{Im}(u)) + \dim(\operatorname{Ker}(u))$$
Il reste à établir que $\operatorname{Im}(u) \cap \operatorname{Ker}(u) = \{0\}$. Soit P un polynôme appartenant à $\operatorname{Im}(u)$ et à $\operatorname{Ker}(u)$.
On a, d'après les questions 2 et 3 :
$$\exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \quad P = \lambda X(X+1) + \mu X(X-1) \quad \text{et} \quad P(1) = P(-1) = 0$$
De
$$0 = P(1) = 2\lambda \quad \text{et} \quad 0 = P(-1) = 2\mu$$
on tire $\lambda = \mu = 0$ puis $P = 0$. En conclusion, on a $E = \operatorname{Ker}(u) \oplus \operatorname{Im}(u)$.

5. Par concaténation des bases trouvées précédemment, on obtient une nouvelle base de E :
$$\mathscr{B} = \left(X^2-1, X\left(X^2-1\right), X(X+1), X(X-1)\right)$$
Comme
$$u\left(X^2-1\right) = u\left(X\left(X^2-1\right)\right) = 0, \quad u(X(X+1)) = 2X(X+1), \quad u(X(X-1)) = 2X(X-1)$$
la matrice de u dans $\mathscr{B}$ est
$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
Elle est bien diagonale.

Solution de l'exo d'info

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
```

1.
```
def u(n,d):
    x = d
    for i in range(1,n+1):
        if x %4 == 0:
            x = x//4
        else:
            x = (3*x+2)//2
    return x

X = list(range(30))

L = [u(n,25) for n in range(30)]

M = [u(n,37) for n in range(30)]

plt.plot(X,L)
plt.plot(X,M)
plt.show()
```

2. Si $u_n = 1$ alors $(u_k)_{k\geq n}$ est périodique et prend successivement les valeurs $1, 2$ et 4.

3.
```
def vol(d):
    n = 0
    m = d
    while u(n,d) != 1:
        if u(n,d) > m:
            m = u(n,d)
        n += 1
    return n, m
```

4.
```
N = [vol(d)[1] for d in range(1,1001)]

Y = list(range(1,1001))
plt.plot(Y,N)
plt.show()
```

5.
```
V = [d for d in range(1,1001) if vol(d)[1] >= 10**5]
Resultats = [vol(d) for d in V]
Durees_Vol = [vol(d)[0] for d in V]
```

6.
```
Verification = sorted([vol(d)[0] for d in range(1,1001)])
```