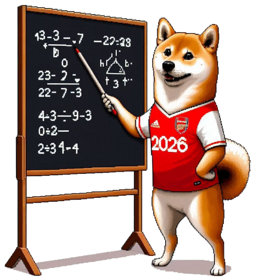
Mathématiques PT. 2025 - 2026

Mathématiques & Informatique - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
Lycée Voltaire, Paris 11e.



Préparation à l'oral

Math - Probabilités
Semaine du 26 Mai

Sujet OB-P-1

On considère la matrice $M = (X_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ où les $X_{i,j}$ sont des variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Bernoulli de paramètre $1/2$. On dit que (i,j) est un point selle lorsque $X_{i,j}$ est le minimum de sa ligne et le maximum de sa colonne.

1. Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. Déterminer la probabilité que (i,j) soit un point selle.

2. Déterminer la probabilité p_n que M ait une colonne nulle.

3. Donner un équivalent de p_n lorsque n tend vers l'infini.

4. Déterminer la probabilité que M admette un point selle.

Solution du sujet OB-P-1 : Math II 2025, 2023

1. Un coefficient aléatoire de M est un point selle si c'est le coefficient maximal de sa colonne et minimal de sa ligne. Si $X_{i,j}$ vaut 0, c'est automatiquement un minimum, mais pour être un maximum il faut que tous les termes soient nuls. Si $X_{i,j}$ vaut 1 c'est automatiquement un maximum mais pour être un minimum, il faut que tous les termes valent 1.
On utilise alors la formule des probabilités totales avec le s.c.e $\{[X_{i,j}=0],\ [X_{i,j}=1]\}$.

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\left((i,j) \text{ point selle de } M\right) &= \mathbf{P}\left([(i,j) \text{ point selle de } M] \cap [X_{i,j}=0]\right) + \mathbf{P}\left([(i,j) \text{ point selle de } M] \cap [X_{i,j}=1]\right)\\
&= \mathbf{P}\left(\bigcap_k [X_{i,k}=0]\right) + \mathbf{P}\left(\bigcap_k [X_{k,j}=1]\right)\\
&= \prod_k \mathbf{P}(X_{i,k}=0) + \prod_k \mathbf{P}(X_{k,j}=1) \qquad \text{par indépendance}\\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.
\end{aligned}$$

2. On passe par le complémentaire. Notons Z l'évènement «aucune colonne n'est nulle» et Z_j «la colonne j est nulle». On peut alors écrire

$$Z = \bigcap_{j=1}^{n} \overline{Z_j}$$

avec $\overline{Z_j} = \overline{\bigcap_i [X_{i,j}=0]} = [S_j > 0]$ où on note $S_j = \sum_{i=1}^{n} X_{i,j}$.
Par le **lemme des coalitions**, les variables aléatoires S_j sont indépendantes. Ainsi

$$\mathbf{P}(Z) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{j=1}^{n} [S_j > 0]\right) = \prod_{j=1}^{n} \left(1 - \mathbf{P}(S_j = 0)\right) = \prod_{j=1}^{n} \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

Il suit que, pour $n \to +\infty$,

$$\begin{aligned}
p_n &= 1 - \mathbf{P}(Z) = 1 - \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)^n\\
&= 1 - \exp\left(n \ln\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)\right)
\end{aligned}$$

3. Par suite :

$$\begin{aligned}
p_n &= 1 - \exp\left(-n\left(\frac{1}{2}\right)^n + o\left(n\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)\right)\\
&= 1 - 1 + n\left(\frac{1}{2}\right)^n + o\left(n\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) \sim n\left(\frac{1}{2}\right)^n
\end{aligned}$$

4. On voit assez rapidement que M admet un point selle si et seulement si M a (au moins) une colonne de 0 ou (au moins) une ligne de 1 (et ces deux évènements sont incompatibles).
En effet, si M a une colonne de 0, tous les termes de la colonne sont des points selles (même chose si M a une ligne de 1).
Si M n'a aucune colonne nulle mais admet un point selle, alors ce terme est vaut 1 et, comme c'est le minimum de la ligne, celle ci est constituée de 1.
Un raisonnement analogue à la question précédente donne que la probabilité d'avoir au moins une ligne de 1 vaut aussi p_n (les probabilités de prendre la valeur 0 ou 1 pour chaque coefficient sont les mêmes). Au final, M admet un point selle avec probabilité $2p_n$.