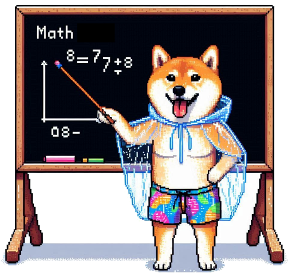
Mathématiques PT. 2025 - 2026

Mathématiques & Informatique - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
Lycée Voltaire, Paris 11e.



Préparation à l'oral

Math - Probabilités
Semaine du 26 Mai

Sujet OB-P-2

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ. On considère l'événement

$$E_\lambda : \text{« } X \text{ est divisible par } 3 \text{ »}.$$

1. Écrire $\mathbf{P}(E_\lambda)$ sous la forme d'une somme de série.

2. Soit

$$g : \lambda \mapsto e^{\lambda}\mathbf{P}(E_\lambda).$$

- **a**. Montrer que g est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et donner sans calcul $g(0)$ et $g'(0)$.
- **b**. Trouver une équation différentielle du second ordre, à coefficients constants, vérifiée par g.
- **c**. Résoudre cette équation différentielle.
- **d**. En déduire $\mathbf{P}(E_\lambda)$ puis que la limite de $\mathbf{P}(E_\lambda)$ quand $\lambda \to +\infty$.

Solution du sujet OB-P-2 : Math II 2025

1. Un entier $n \in \mathbb{N}$ est divisible par 3 si et seulement si il s'écrit $n = 3k$ avec $k \in \mathbb{N}$. Ainsi,

$$\mathbf{P}(E_\lambda) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = 3k) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{3k}}{(3k)!}.$$

2. **a**. La fonction $g : \lambda \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{3k}}{(3k)!}$ est alors la somme d'une série entière, lacunaire, de rayon de convergence $R = +\infty$. En particulier, elle est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Par unicité du développement en série entière (c'est la série de Taylor), on a

$$g(0) = 1, \qquad g'(0) = 0.$$

(Il n'y a pas de terme en λ dans la somme.)

b. On peut dériver terme à terme. On a, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$;

$$g'(\lambda) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{3k-1}}{(3k-1)!}, \qquad g''(\lambda) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{3k-2}}{(3k-2)!}.$$

On... additionne

$$g''(\lambda) + g'(\lambda) + g(\lambda) = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{\lambda^{3k-2}}{(3k-2)!} + \frac{\lambda^{3k-1}}{(3k-1)!} + \frac{\lambda^{3k}}{(3k)!} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} = e^\lambda.$$

Donc g est solution de

$$y'' + y' + y = e^x.$$

c. On trouve (résolution de l'équation homogène puis recherche d'une solution particulière sous une forme $x \mapsto \alpha e^x$) que les solutions de (E) sont de la forme

$$y : x \mapsto \frac{1}{3} e^x + e^{-x/2} \left(A \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} x\right) + B \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} x\right) \right), \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

d. Les conditions initiales sur g permettent alors d'obtenir $A = \frac{2}{3}$ et $B = 0$, ce qui permet de conclure

$$\mathbf{P}(E_\lambda) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} e^{-3\lambda/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \lambda\right) \underset{\lambda \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{3},$$

car le cos est borné.