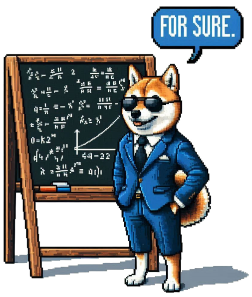
**Mathématiques PT.** 2025 - 2026

Mathématiques & Informatique - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
Lycée Voltaire, Paris 11e.




## Préparation à l'oral

*Math - Probabilités*
*Semaine du 26 Mai*

---

### Sujet OB-P-3

On définit la suite $(p_n)_{n\geq 1}$ par

$$p_1 = \frac{1}{6}, \quad p_{n+1} = \frac{1+5p_n}{6}.$$

**1**. Exprimer le terme général de la suite $(p_n)$, pour $n \geqslant 1$.

On prend $N$ dés équilibrés qu'on lance simultanément. On note $X_1$ le nombre de six obtenus et on retire alors les dés qui ont donné un six. On réitère l'expérience et on note $X_2$ le nombre de nouveaux six obtenus et on retire alors les dés qui ont donné un six. On réitère de nouveau $n$ fois l'expérience et on note $S_n$ le nombre de six obtenus après $n$ lancers, soit

$$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

**2**. Déterminer la loi de $S_1$ et la loi de $S_2$.

**3**. Montrer que $S_n$ suit la loi binomiale $\mathscr{B}(N, p_n)$.

**4**. Montrer que l'événement $S_n = N$ à partir d'un certain rang $n$ est quasi-certain.

## Solution du sujet OB-P-3 : Math I 2025

**1**. On reconnait une suite arithmético-géométrique. On cherche d'abord la suite constante (égale à $\ell$) vérifiant la relation de récurrence

$$\ell = \frac{1+5\ell}{6} \iff \ell = 1.$$

La suite auxiliaire $(q_n)$ définie par $q_n = p_n - \ell = p_n = 1$ est géométrique de raison $5/6$. Il suit que, pour tout $n \geq 1$,

$$p_n = 1 + q_n = 1 + \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} q_1 = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{n}.$$

**2**. $S_1 = X_1$. On compte le nombre de succès (le nombre de six) lors de $n$ lancers de dés. On a donc $S_1 \sim \mathscr{B}(N, 1/6)$. $S_2 = X_1 + X_2$. On connait la loi conditionnelle de $X_2$ sachant $[X_1 = k]$. Plus précisément, sachant $[X_1 = k]$, on compte le nombre de six lors de $n - k$ lancers de dés, on a encore un schéma binomial. On a besoin de la FPT, avec le sce $\{[X_1 = k] : k \in [\![0, N]\!]\}$ pour décrire en détails. Plus précisément

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(S_2 = j) &= \sum_{k=0}^{N} \mathbf{P}(S_2 = j \cap X_1 = k) = \sum_{k=0}^{j} \mathbf{P}(X_2 = j - k \cap X_1 = k) \\
&= \sum_{k=0}^{j} \mathbf{P}_{[X_1=k]}(X_2 = j-k)\mathbf{P}(X_1 = k) \\
&= \sum_{k=0}^{j} \binom{N}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^{k} \left(\frac{5}{6}\right)^{N-k} \binom{N-k}{j-k} \left(\frac{1}{6}\right)^{j-k} \left(\frac{5}{6}\right)^{N-j} \\
&= \left(\frac{1}{6}\right)^{j} \sum_{k=0}^{j} \binom{N}{k}\binom{N-k}{j-k}
\end{aligned}$$

Or, $\displaystyle\binom{N}{k}\binom{N-k}{k} = \binom{N}{j}\binom{j}{j-k}$. Il suit que

$$\mathbf{P}(S_2 = j) = \left(\frac{1}{6}\right)^{j} \binom{N}{j} \left(\frac{25}{36}\right)^{N-j} \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} \left(\frac{5}{6}\right)^{j-k} = \left(\frac{1}{6}\right)^{j} \binom{N}{j} \left(\frac{25}{36}\right)^{N-j} \left(1 + \frac{5}{6}\right)^{j} = \binom{N}{j} \left(\frac{11}{36}\right)^{j} \left(\frac{25}{36}\right)^{N-j},$$

et on a $S_2 \sim \mathscr{B}\left(N, \frac{11}{36}\right)$. Observons que $\dfrac{11}{36} = p_2$...

**3**. On généralise en procédant par récurrence. Il n'y a pas besoin d'initialiser, la question précédente le fait déjà. Soit donc $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $S_n \sim \mathscr{B}(N, p_n)$. Soit $j \in [\![0, N]\!]$.

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(S_{n+1} = j) &= \sum_{k=0}^{N} \mathbf{P}(S_{n+1} = j \cap S_n = k) = \sum_{k=0}^{j} \mathbf{P}(X_{n+1} = j - k \cap S_n = k) \\
&= \sum_{k=0}^{j} \mathbf{P}_{[S_n=k]}(X_{n+1} = j-k)\mathbf{P}(S_n = k) \\
&= \sum_{k=0}^{j} \binom{N}{k} p_n^k \left(1 - p_n\right)^{N-k} \binom{N-k}{j-k} \left(\frac{1}{6}\right)^{j-k} \left(\frac{5}{6}\right)^{N-j}
\end{aligned}$$

Or, $\displaystyle\binom{N}{k}\binom{N-k}{k} = \binom{N}{j}\binom{j}{j-k}$. Il suit que, par la formule du binôme,

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(S_{n+1} = j) &= \binom{N}{j} \left(\frac{1}{6}\right)^{j} \left(\frac{5(1-p_n)}{6}\right)^{N-j} \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} (6p_n)^k (1-p_n)^{j-k} \\
&= \binom{N}{j} \left(\frac{1}{6}\right)^{j} \left(\frac{5(1-p_n)}{6}\right)^{N-j} (6p_n + 1 - p_n)^j = \binom{N}{j} \left(\frac{1}{6}\right)^{j} \left(\frac{5(1-p_n)}{6}\right)^{N-j} (5p_n + 1)^j \\
&= \binom{N}{j} p_{n+1}^j \left(\frac{5(1-p_n)}{6}\right)^{N-j}
\end{aligned}$$

Or,

$$1 - p_{n+1} = 1 - \frac{1+5p_n}{6} = \frac{5-5p_n}{6} = \frac{5(1-p_n)}{6},$$

on a bien $S_{n+1} \sim \mathscr{B}(N, p_{n+1})$.

**4**. Cette dernière question se reformule comme suit : on doit montrer que

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{r=1}^{+\infty}\bigcap_{k=r}^{+\infty}[S_k = N]\right) = 1$$

Or, il est clair que $[S_r = N] \subset [S_{r+1} = N]$ et par conséquent $\displaystyle\bigcap_{k=r}^{+\infty}[S_k = N] = [S_r = N]$. La suite $([S_r = N])_{r\geq 1}$ étant croissante au sens de l'inclusion, par limite monotone, on a

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{r=1}^{+\infty}\bigcap_{k=r}^{+\infty}[S_k = N]\right) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{r=1}^{+\infty}[S_r = N]\right) = \lim_{r\to+\infty}\mathbf{P}(S_r = N) = \lim_{k\to+\infty} p_r^N = \lim_{r\to+\infty}\left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^r\right)^N = 1.$$