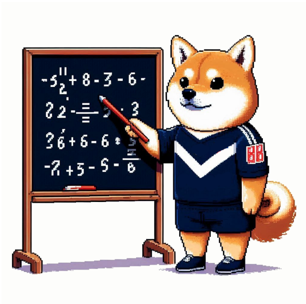
Mathématiques PT. 2025 - 2026

Mathématiques & Informatique - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
Lycée Voltaire, Paris 11e.



Préparation à l'oral

Math - Probabilités
Semaine du 26 Mai

Sujet OB-P-4

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes qui suivent toutes une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.
Pour $k \in \mathbb{N}$, on note $[T = k]$ l'évènement :« le motif $(1, 1)$ apparait pour la première fois au k-ième rang dans $(X_0, X_1, \ldots, X_n, \ldots)$ ».
Par exemple, si on considère la suite $(1, 0, 1, 1, \ldots)$, alors on a $T = 3$.

1. Calculer $\mathbf{P}(T = 0)$, $\mathbf{P}(T = 1)$ et $\mathbf{P}(T = 2)$.

2. On définit les évènements suivants :

- ✗ E_n : « Le motif $(1, 1)$ n'est pas encore apparu au rang n et $X_n = 0$ », de probabilité p_n ;
- ✗ F_n : « Le motif $(1, 1)$ n'est pas encore apparu au rang n et $X_n = 1$ », de probabilité q_n.

Montrer que $\begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}$.

3. On définit la suite (φ_n) en posant $\varphi_0 = \dfrac{1}{2}, \varphi_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \varphi_{n+2} = \varphi_{n+1} + \varphi_n$.

Démontrer : $\forall n \geqslant 2,\ \mathbf{P}(T = n) = \dfrac{\varphi_{n-2}}{2^n}$.

4. En déduire $\mathbf{P}(T = n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Solution du sujet OB-P-4 : Math II 20XX

1. On ne peut pas avoir eu le motif $(1,1)$ au bout d'un seul tirage donc $\mathbf{P}(T=0)=0$. De plus il est clair que

$$\mathbf{P}(T=1)=\mathbf{P}(X_0=1,X_1=1)=\mathbf{P}(X_0=1)\mathbf{P}(X_1=1)=\frac{1}{4}$$

par indépendance de X_0 et X_1. De même

$$\mathbf{P}(T=2)=\mathbf{P}(X_0=0,X_1=1,x_2=1)=\frac{1}{8}.$$

2. E_{n+1} est donc l'évènement «Le motif $(1,1)$ n'est pas encore apparu au rang $n+1$ et $X_{n+1}=0$» de probabilité p_{n+1}. Or les évènements $(X_n=0),(X_n=1)$ forment un système complet d'évènements on peut donc appliquer la formule des probabilités totales:

$$\mathbf{P}(E_{n+1}) \quad = \quad \mathbf{P}(E_{n+1}\cap[X_n=0])+\mathbf{P}(E_{n+1}\cap[X_n=1])$$

Or, les évènements E_{n+1} et $[X_n=i]$ ne sont pas indépendants. Mais, observons que $E_{n+1}\cap[X_n=0]$ est réalisé si et seulement si on a pas eu le motif $(1,1)$ lors des $n+1$ premiers "lancers" et si les deux dernières variables (aux rangs n et $n+1$) prennent la valeur 0. On voit que la réalisation de cet évènements et donc équivalente à ne pas avoir de motif $(1,1)$ lors des n premiers "lancers" et terminer par deux 0 ce qui est exactement l'évènement $E_n\cap[X_{n+1}=0]$ sauf que cette fois ces deux évènements sont indépendants (c'est une conséquence du lemme des coalitions). Le même raisonnement permet de voir que

$$E_{n+1}\cap[X_=1]=F_n\cap[X_{n+1}=0],$$

et on écrit alors

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(E_{n+1}) &= \mathbf{P}(E_{n+1}\cap[X_n=0])+\mathbf{P}(E_{n+1}\cap[X_n=1])=\mathbf{P}(E_n\cap[X_{n+1}=0])+\mathbf{P}(F_n\cap[X_{n+1}=0])\\
&= \frac{1}{2}\mathbf{P}(E_n)+\frac{1}{2}\mathbf{P}(F_n)=\frac{1}{2}p_n+\frac{1}{2}q_n,
\end{aligned}$$

ce qui est bien la première relation de récurrence demandée. De même

$$\mathbf{P}(F_{n+1}) \quad = \quad \mathbf{P}(F_{n+1}\cap[X_n=0])+\mathbf{P}(F_{n+1}\cap[X_n=1])=\mathbf{P}(E_n\cap[X_{n+1}=0)+0=\frac{1}{2}p_n,$$

car $F_{n+1}\cap[X_n=1]=\emptyset$: si on termine par le motif (1,1) alors $T\leq n+1$ et F_{n+1} ne peut être réalisé.

3. On se doute qu'il faut utiliser E_n et F_n et on voit que $E_n\cup F_n=[T>n]$ et l'union est disjointe, donc $\mathbf{P}(T>n)=p_n+q_n$. De plus, il est classique d'écrire

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(T=n)&=\mathbf{P}(T>n-1)-\mathbf{P}(T>n)\\
&=p_{n-1}+q_{n-1}-p_n-q_n\\
&=p_{n-1}+q_{n-1}-\frac{1}{2}\left(p_{n-1}+q_{n-1}\right)-\frac{1}{2}p_{n-1}\\
&=\frac{1}{2}q_{n-1}=\frac{p_{n-2}}{4}
\end{aligned}$$

Donc $\mathbf{P}(T=n)=\frac{p_{n-2}}{4}$.
Par ailleurs, les relations données à la question précédente impliquent $p_{n+1}=\frac{1}{4}\left(2p_n+p_{n-1}\right)$ avec $p_0=\frac{1}{2}=p_1$. On montre ensuite par récurrence que $\forall n, p_n=\frac{\varphi_n}{2^n}$ en utilisant les deux formules de récurrence définissant p_n et φ_n.
On déduit alors le résultat des deux points ci-dessus.

4. φ_n est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 , on peut donc appliquer le cours. Les racines de l'équation caractéristique sont $\varphi=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ (le nombre d'or) et $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}=\alpha$.
Donc

$$\exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2,\qquad \varphi_n=\lambda\varphi^n+\mu\alpha^n$$

et on détermine les constantes en utilisant les valeurs initiales φ_0 et φ_1. On trouve

$$\lambda=\frac{5-\sqrt{5}}{20},\qquad \mu=\frac{5+\sqrt{5}}{20}.$$