



Préparation à l'oral

*Math - Pierre Montagnon
Mercredi 17 Juin*

Sujet OB-PM-1

On se place dans \mathbb{R}^3 muni du produit scalaire usuel, noté \cdot et on considère une base orthonormée (i, j, k) .
Soit f un endomorphisme de \mathbb{R}^3 tel que, pour tous vecteurs x, y de \mathbb{R}^3 , $f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$.

1. Montrer que $(f(i), f(j), f(k))$ est une famille orthogonale de \mathbb{R}^3 .
2. Montrer que la norme N des vecteurs $f(i), f(j)$ et $f(k)$ vaut soit 1 soit 0.
3. Déterminer f si $N = 0$.

On suppose désormais que $N = 1$.

4. Montrer que f est une rotation.

Soit g un endomorphisme de \mathbb{R}^3 tel que $(g(i), g(j), g(k))$ est une base orthogonale, et ψ l'application qui, à tout $x, y \in \mathbb{R}^3$, associe $g(x) \cdot g(y)$.

5. Que dire de ψ si $g = f$?
6. Montrer que ψ est un produit scalaire sur \mathbb{R}^3 .

✂

Question de cours

Énoncer le théorème de continuité sous le signe intégral et l'appliquer à la fonction $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(x^2 + t^2)^3}$.

Solution du sujet OB-PM-1 : Math I 2022

1. Puisque (i, j, k) est orthonormée, on a $k = i \wedge j$ et $j = k \wedge i$.
On a donc $f(k) = f(i) \wedge f(j)$ et $f(j) = f(k) \wedge f(i)$, ce qui suffit à prouver que les vecteurs $f(i), f(j)$ et $f(k)$ sont deux à deux orthogonaux.
2. Puisque cette famille est orthogonale, on a $\|f(k)\| = \|f(i)\|\|f(j)\|$, $\|f(j)\| = \|f(k)\|\|f(i)\|$ et $\|f(i)\| = \|f(j)\|\|f(k)\|$.
On en tire $\|f(k)\| = \|f(j)\|^2\|f(k)\|$.
Si $\|f(k)\| = 0$ alors on a immédiatement $\|f(i)\| = \|f(j)\| = 0$.
Sinon, on obtient $\|f(j)\| = 1$ puis $\begin{cases} \|f(i)\| = \|f(k)\| \\ \|f(k)\|^2 = 1 \end{cases}$ et enfin $\|f(i)\| = \|f(j)\| = \|f(k)\| = 1$.
3. Si $N = 0$ on a immédiatement $f = 0$.
4. Si $N = 1$, alors f transforme la base orthonormée directe (i, j, k) en une base orthonormée directe $(f(i), f(j), f(k))$ et donc f est une isométrie directe, c'est à dire une rotation (éventuellement $\text{Id}_{\mathbb{R}^3}$).
5. Si $g = f$ on a alors $\psi(x, y) = f(x) \cdot f(y)$. Comme f est une isométrie, elle conserve le produit scalaire, et on a donc $\psi(x, y) = x \cdot y$: ψ est le produit scalaire usuel de \mathbb{R}^3 .
6. La symétrie est évidente.
La linéarité à gauche découle de celle du produit scalaire usuel et de la linéarité de g . On en tire la bilinéarité.
Pour tout $x \in \mathbb{R}^3$ on a $\psi(x, x) = \|g(x)\|^2 \geq 0$, avec égalité si et seulement si $g(x) = 0$ soit $x \in \ker g$.
Or g transforme une base en une base, et donc elle est bijective et $\ker g = \{0\}$, ce qui montre que ψ est une forme définie.
On a bien montré que ψ est un produit scalaire sur \mathbb{R}^3 .

Question de cours

Théorème 1.

Continuité sous le signe \int

Soit $g : I \times J \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de deux variables telle que:

i. **Caractère C^0 - étude « en x »**

✘ Pour tout $t \in J$, la fonction $x \mapsto g(x, t)$ est continue sur I ;

ii. **Intégrabilité (domination) - étude « en t »**

✘ Pour tout $x \in I$, la fonction $t \mapsto g(x, t)$ est continue sur J ;

✘ g vérifie l'hypothèse de domination sur $I \times J$.

Alors, $f : x \mapsto \int_J g(x, t) dt$ définit une fonction continue sur I .