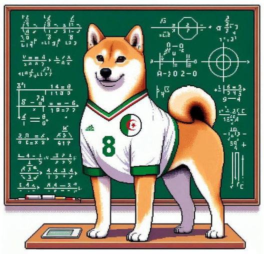


Préparation à l'oral

Math - Pierre Montagnon
Mercredi 17 Juin

Sujet OB-PM-2

On considère la courbe paramétrée $\Gamma : \begin{cases} x(t) = 2t^2 \\ y(t) = 2t \end{cases}$.

1. Donner une équation cartésienne de la courbe Γ et la tracer.

2. Donner une équation cartésienne de la tangente T_t à Γ en son point $M(t)$.

3. Déterminer et tracer le lieu des projections orthogonales de $F(1/2, 0)$ sur les tangentes à Γ.

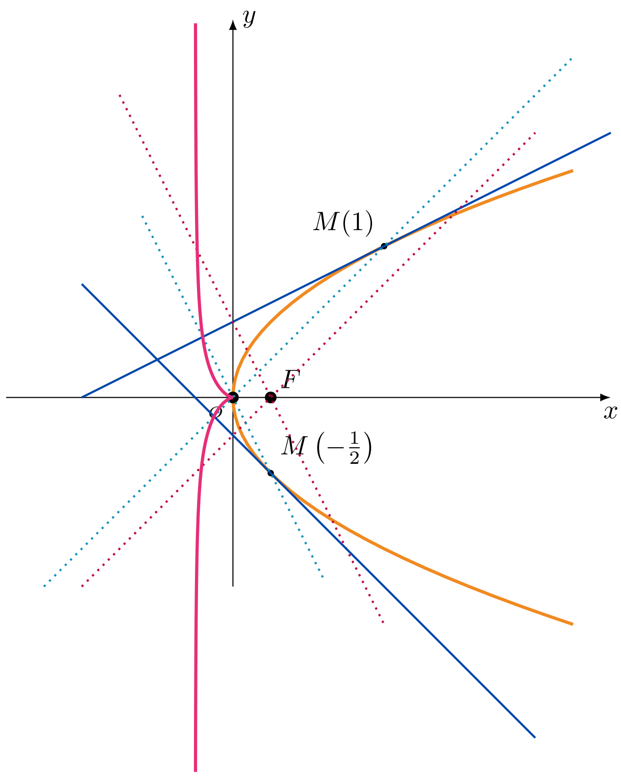
4. Déterminer et tracer le lieu des projections orthogonales de $O(0, 0)$ sur les tangentes à Γ.

Solution du sujet OB-PM-2 : Math II 2024

1. Il est clair que

$$M(x,y) \in \Gamma \iff \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = 2t^2 \\ y = 2t \end{cases} \iff y^2 = 2x$$

On reconnait l'équation de la parabole de sommet O, d'axe focal (Ox) qu'on sait dessiner les yeux fermés. Pour guider le tracé, on peut utiliser le fait que Γ passe par les points $M(1) = (2,2)$ et $M(-1/2) = (1/2,-1)$.



2. En un point régulier (c'est à dire où la dérivée ne s'annule pas ; ne pas oublier d'insister là dessus) $M(t) \in \Gamma$, la tangente est dirigée par $\overrightarrow{M'(t)}$. Or, $\overrightarrow{M'(t)} = (4t, 2) \neq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ (la parabole est donc une courbe régulière). Notons T_t la tangente à Γ au point $M(t)$.

$$\begin{aligned} A(x,y) \in_t \quad &\iff \quad \overrightarrow{M(t)A} \text{ et } \overrightarrow{M'(t)} \text{ colinéaires} \iff \det\left(\overrightarrow{M(t)A},\ \overrightarrow{M'(t)}\right) = 0 \\ &\iff \quad \begin{vmatrix} x - 2t^2 & 4t \\ y - 2t & 2 \end{vmatrix} = 0 \\ &\iff \quad 2x - 4t^2 - 4ty + 8t^2 = 0 \iff 2x - 4ty + 4t^2 = 0, \end{aligned}$$

ce qui donne l'équation cherchée.

3. Soit $H_t(a(t), b(t))$ le projeté orthogonal de F sur T_t. On a alors

$$\begin{cases} H_t \in T_t \\ \overrightarrow{FH_t} \perp \overrightarrow{M'(t)} \end{cases} \iff \begin{cases} 2a(t) - 4tb(t) + 4t^2 = 0 & (L_1) \\ 4ta(t) - 2t + 2b(t) = 0 & (L_2) \end{cases}$$

On voit que $(L_1) + 2t(L_2)$ donne $(2 + 8t^2)a(t) = 0$ et donc $a(t) = 0$. Il découle $b(t) = t$. Le lieux cherché est donc l'ensemble $\{(0,t) :\ t \in \mathbb{R}\}$ qui est une paramétrisation de l'axe (Oy).

4. Même méthode. Notons $I_t(c(t), d(t))$ le projeté orthogonal de O sur T_t.

$$\begin{cases} I_t \in T_t \\ \overrightarrow{OI_t} \perp \overrightarrow{M'(t)} \end{cases} \iff \begin{cases} 2c(t) - 4td(t) + 4t^2 = 0 & (L_1) \\ 4tc(t) + 2d(t) = 0 & (L_2) \end{cases}$$

On voit que $(L_1) + 2t(L_2)$ donne $(2 + 8t^2)c(t) + 4t^2 = 0$ et donc $c(t) = -\dfrac{2t^2}{1+4t^2}$. Il découle $d(t) = \dfrac{4t^3}{1+4t^2}$. Notons γ la courbe paramétrée par $N(t) = (c(t), d(t))$.

On étudie brièvement cette courbe. Comme c est paire et d est impaire, on peut restreindre l'étude à $\mathbb{R}_+$ et compléter

le tracer par symétrie d'axe (Ox).
La courbe présente un point singulier pour $t=0$. Comme

$$c(t) = -2t^2\left(1-4t^2+16t^4+o(t^4)\right) = -2t^2+o(t^3), \qquad d(t) = 4t^3\left(1-4t^2+16t^4+o(t^4)\right) = 4t^3+o(t^3)$$

on a

$$N(t) = \begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix} t^2 + \begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix} t^3 + o(t^3)$$

et les entiers caractéristiques sont $p=2$ et $q=3$ donc le point singulier est un point de rebroussement de première espèce. La fonction c est clairement décroissante sur $\mathbb{R}_+$ et y est croissante. La branche infinie pour $t \to +\infty$ vérifie

$$\frac{d(t)}{c(t)} = -2t \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$$

On a donc une branche parabolique de direction verticale. Le dessin en découle facilement. Il apparait sur la figure ci-avant.