Mathématiques & Informatique - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
Lycée Voltaire, Paris 11e.

Préparation à l'oral

Math - Pierre Montagnon
Mercredi 17 Juin

Sujet OB-PM-3

Pour $m \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose:

$$I_m = \int_0^\pi (\sin t)^{2m} dt, \quad \text{et} \quad F(x) = \int_0^\pi \cos(x \sin t) dt$$

1. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}$

$$I_m = \pi \frac{(2m)!}{4^m (m!)^2}.$$

2. Montrer que pour tout $t \in [0, \pi]$ la fonction

$$x \mapsto f_t(x) = \cos(x \sin t)$$

est la somme d'une série entière et préciser le rayon de convergence de cette série.

3. En déduire le développement en série entière de F.

4. Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Solution du sujet OB-PM-3 : Math II 2025

1. La suite d'intégrales (I_m) est bien définie, chacune d'entre elle est l'intégrale d'une fonction continue sur un segment. On suit la suggestion de l'énoncé pour commencer à obtenir une relation de récurrence. Soit $m \in \mathbb{N}$. On a :

$$I_{m+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t)\sin^{2m}(t)\mathrm{d}t = \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m}(t)\mathrm{d}t}_{=I_m} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\sin^{2m}(t).$$

On pose $u'(t) = \cos(t)\sin^{2m}(t)$, $v(t) = \cos(t)$, $u(t) = -\frac{\sin^{2m+1}(t)}{2m+1}$, $v'(t) = \sin(t)$. $u, v \in \mathscr{C}^1\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right)$, donc, par intégration par parties et linéarité, on a :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\sin^{2m}(t) = \underbrace{\left[-\cos(t)\frac{\sin^{2m+1}(t)}{2m+1}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0} + \frac{1}{2m+1}\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m+2}(t)\mathrm{d}t}_{=I_{m+1}}.$$

Donc $I_{m+1} = I_m - \frac{1}{2m+1}I_{m+1}$ et donc $\forall m \in \mathbb{N}, I_{m+1} = \frac{2m+1}{2m+2}I_m$.
Avec $I_0 = \pi$, une récurrence donne le résultat.

2. La fonction cos étant DSE sur $\mathbb{R}$, on peut écrire,

$$\forall t \in [0, \pi], \forall x \in \mathbb{R}, \quad f_t(x) := \cos(x\sin(t)) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k \sin^{2k}(t)}{(2k)!}x^{2k}$$

La formule étant vraie sur $\mathbb{R}$ le rayon de convergence vaut $+\infty$.

3. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. On veut faire une permutation série/intégrale (à ne pas confondre avec une intégration terme à terme). On pourra rappeler si le candidat ne s'en souvient pas (mais il devrait) les conditions du théorème.

Notons $f_{k,x} : t \mapsto \frac{(-1)^k \sin^{2k}(t)}{(2k)!}x^{2k}$. On sait déjà que $t \mapsto f_{k,x}(t)$ est intégrable sur $[0, \pi]$ (fonction continue sur un segment) et que $t \mapsto f_t(x)$ est continue sur $[0, \pi]$ par composition de telles fonctions. De plus,

$$\int_0^{\pi} |f_{k,x}(t)|\mathrm{d}t = \frac{\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^{2k}(t)\mathrm{d}t}{(2k)!}|x|^{2k} = \frac{\pi}{2^{2k}(k!)^2}|x|^{2k},$$

qui est bien, pour tout $x \in \mathbb{R}$, le terme général d'une série convergente (d'Alembert). Le théorème du cours s'applique et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad F(x) = \int_0^{\pi} \cos(\sin(t)x)\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k\pi}{2^{2k}(k!)^2}x^{2k}.$$

4. F est de classe $\mathscr{C}^\infty$ à l'intérieur du disque ouvert de convergence, donc sur $\mathbb{R}$, c'est immédiat avec ce qui précède. Il ne faut surtout pas partir sur une utilisation du théorème de dérivation des intégrales à paramètres.

Pour rappel,

Théorème 1. **Permutation somme et intégrale**

Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions intégrables sur un même intervalle I telles que, pour tout $t \in I$, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} f_n(t)$ est convergente. On note alors

$$f : t \in I \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t).$$

On suppose que :

i. f est continue sur I, sauf éventuellement aux bords de I ;
ii. La série $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\int_I |f_n(t)|\mathrm{d}t$ est convergente.

Alors, f est intégrable sur I et

$$\int_I f(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_I f_n(t)\mathrm{d}t.$$