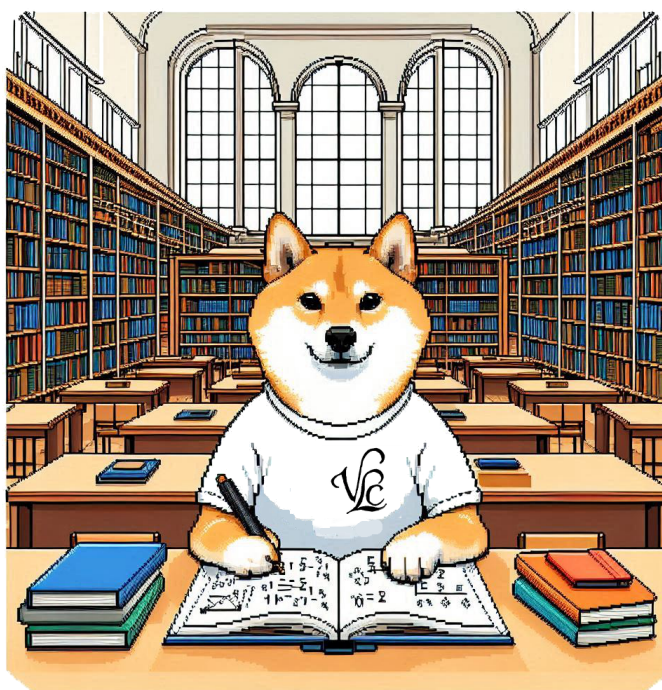




# X

## Révisions



*On propose, comme aide à la révision, une synthèse de toutes les questions et exercices de cours posés en colle tout au long de l'année ainsi qu'un pot pourri d'exercices (posés en colle ou non).*

*On n'aura pas la naïveté de croire que cette petite sélection fait preuve d'une quelconque exhaustivité ou que la maîtrise des notions suffit, mais c'est une première étape.*

*On observera que sont également présents quelques maigres exercices d'informatique, qu'on ne négligera pas.*

*Bon courage à toutes et à tous pour les concours !*

## 1 Questions de cours

1. Trigonométrie : Formules d'addition (**Proposition 3**) et Formules de duplication (**Proposition 4**).
2. Énoncer et démontrer par récurrence la formule du binôme de Newton.
3. Calculer, pour  $\theta \in \mathbb{R}$  (en discutant éventuellement selon les valeurs de  $\theta$ ), la somme  $\sum_{k=0}^n \sin(k\theta)$ .
4. Exprimer  $\sin(5\theta)$  en fonction de  $\sin(\theta)$ .
5. Déterminer la forme algébrique de  $z = \frac{(1+i)^{2000}}{(i-\sqrt{3})^{1000}}$ .
6. **Python.** On définit la suite  $(S_n)$  par  $S_0 = 0, S_1 = 1, S_{2n} = S_n$  et  $S_{2n+1} = S_n + S_{n+1}$ .  
Écrire une fonction d'en-tête `def L(N) :` qui renvoie la suite des  $N$  premiers termes de la suite.
7. Factoriser, dans  $\mathbb{C}[X]$ ,  $X^4 + 4X^2 + 16$ .
8. Suites récurrentes et fonctions contractantes : énoncé **et démonstration** du **Théorème 11** (**Chapitre 0**, page 15). On en profitera pour rappeler l'énoncé de l'inégalité des accroissements finis (**Théorème 1.23**).
9. Soit  $f$  une fonction dérivable sur  $\mathbb{R}$  admettant  $n \geq 2$  racines distinctes. Montrer que  $f'$  admet au moins  $n - 1$  racines distinctes.
10. Étude de la régularité de la fonction  $f : x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$
11. **Python.** Proposer deux fonctions différentes (dont une des deux récursive) qui permettent de calculer le terme de rang  $n$  de la suite  $(u_n)$  définie par
 
$$u_0 = 1, \quad u_1 = 0, \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n,$$
 où  $a$  et  $b$  sont des réels rentrés en argument.
12. Montrer que la fonction  $f : x \mapsto x^3 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$  admet un développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0. Montrer qu'elle n'est pourtant pas de classe  $\mathcal{C}^1$  en 0. La courbe de  $f$  admet-elle une tangente en 0 ? Commenter.
13. Énoncé de la formule de Leibniz. Application à la détermination de la dérivée  $n$ -ième de  $f : x \mapsto (2x+1)^2 \sin(x)$ .
14. Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}^*$ , on a  $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \pm \frac{\pi}{2}$ .
15. Obtenir le développement limité à l'ordre 3 de la fonction  $f : t \mapsto (\sin(t) \cos^3(t), \sin^2(t))$  en 0 puis, en  $\frac{\pi}{2}$ .
16. a. Montrer que, pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$  avec  $k \geq 2$ , on a :  $\sin^k(x) = o(x)$ ,  $x \rightarrow 0$ .  
b. Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , la famille de vecteurs  $(x \mapsto \sin(x), x \mapsto \sin^2(x), \dots, x \mapsto \sin^n(x))$  est libre dans  $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .
17. **Algorithmique.** Représenter graphiquement et expliquer le principe de construction de la suite  $(u_n)$  permettant d'obtenir une valeur approchée de la solution de l'équation  $f(x) = 0$  par la méthode de Newton.
18. a. Montrer que, pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$  avec  $k \geq 2$ , on a :  $\sin^k(x) = o(x)$ ,  $x \rightarrow 0$ .  
b. Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , la famille de vecteurs  $(x \mapsto \sin(x), x \mapsto \sin^2(x), \dots, x \mapsto \sin^n(x))$  est libre dans  $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .
19. On considère  $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x - y + z - t = 0\}$  et  $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x = y\}$ .  
a. Montrer que  $F, G$  et  $F \cap G$  sont des s.e.v. de  $\mathbb{R}^4$ . En donner une base et la dimension.  
b. Trouver  $F_1$ , s.e.v. de  $F$  et  $G_1$ , s.e.v. de  $G$ , tels que  $\mathbb{R}^4 = (F \cap G) \oplus F_1 \oplus G_1$ .

20. Soient  $H_1$  et  $H_2$  deux hyperplans d'un espace vectoriel  $E$  de dimension finie  $n \geq 2$ . Déterminer  $\dim(H_1 \cap H_2)$ .

21. Soient  $E$  un espace vectoriel et  $f \in \mathcal{L}(E)$ . Montrer que

$$f \circ f = 0 \iff \text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f).$$

Que dire du rang  $r$  d'un tel endomorphisme dans le cas où  $E$  est de dimension finie  $n$  ?

22. Soient  $E$  un espace vectoriel et  $F_1, F_2$  deux sous espaces vectoriels supplémentaires dans  $E$ . Soit  $p$  (resp.  $q$ ) le projecteur sur  $F_1$  (resp.  $F_2$ ) parallèlement à  $F_2$  (resp.  $F_1$ ).  
Montrer que  $p + q = \text{id}_E$  et que  $pq = qp = 0_{\mathcal{L}(E)}$ .

23. **Algorithmique.** Représenter graphiquement et expliquer le principe de construction de la solution  $y$  de l'équation  $y' = f(y, t)$  par la méthode d'Euler.

24. Énoncé du théorème du rang. Cas particulier des endomorphismes en dimension finie. On attend une explication de chaque équivalence du **Théorème 2.46**.

25. Point singulier. Définition. Méthode pour déterminer la nature. Classification (avec dessins).

26. Branches infinies. Définition, méthode, nature.

27. Montrer que la courbe  $\Gamma$  paramétrée par  $M : t \mapsto \left(2t - \frac{1}{t^2}, 2t + t^2\right)$  possède un unique point double dont on donnera les coordonnées.

28. Soit  $M$  un point du plan d'affixe complexe  $z$ .

- Rappeler l'expression de l'affixe complexe de l'image de  $M$  par la rotation  $r_\theta$  de centre  $O$  et d'angle  $\theta$ .
- Rappeler l'expression de l'affixe complexe de l'image de  $M$  par l'homothétie  $h_a$  de centre  $O$  et de rapport  $a$  avec  $a \neq 0$ .
- Vérifier que  $r_\theta$  et  $h_a$  commutent.

29. **Algorithmique.** Écrire une fonction `nb_lettres(texte)` qui prend en argument une chaîne de caractères `texte` et renvoie un dictionnaire associant à chaque lettre le nombre d'occurrences de celle-ci dans le texte.

30. Étudier et tracer la courbe paramétrée par  $M : t \mapsto (2 \cos(t) - \cos(2t), 2 \sin(t) - \sin(2t))$ .

31. Soit  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ . Calculer, pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $A^n$ . Que peut-on dire de la formule si  $n \in \mathbb{Z}$  ?

32. On note  $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$  la base canonique de  $\mathbb{R}_2[X]$  et  $\mathcal{B}' = (X^2, X(X-2), (X-2)^2)$  une autre base de  $\mathbb{R}_2[X]$ . Déterminer la matrice de passage de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{B}'$ . Après un pivot de Gauss simultané, exprimer les coordonnées d'un polynôme  $Q = a + bX + cX^2$  dans  $\mathcal{B}'$ .

33. Soient  $E$  un espace vectoriel de dimension finie et  $p$  une projection de  $E$ . Montrer que  $\text{tr}(p) = \text{rg}(p)$ .

34. Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  une matrice nilpotente. On note  $p = \min\{k \in \mathbb{N} : A^k = 0\}$ . Montrer que  $p \leq n$ .

35. Déterminer, selon la valeurs de  $a \in \mathbb{R}$  et sans calcul, l'image et le noyau de l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & 1 & 1 \\ 1 & \dots & \dots & 1 & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

36. On considère la série  $\sum_{k \geq 2} \frac{1}{k \ln(k)}$ .

Déterminer la nature de la série ainsi qu'un équivalent, lorsque  $n \rightarrow +\infty$  de la somme partielle de rang  $n$ .

37. Soit  $\sum w_n$  une série absolument convergente. Montrer rigoureusement que  $\sum w_n^2$  et  $\sum \frac{w_n}{n}$  sont des séries convergentes.

38. Énoncé du critère de d'Alembert (**Théorème 5.16**).

Application : Soit  $a, b \in \mathbb{R}$ . Déterminer, en fonction de  $a$  et  $b$  la nature de la série  $\sum \frac{b^n (n!)^a}{(2n)!}$ .

39. Énoncé du critère spécial des séries alternées (**Théorème 5.9**).

Montrer que la série  $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$  converge si et seulement si  $\alpha > 0$ .

40. Calculer en mettant en évidence la factorisation le déterminant suivant :  $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \cos a & \cos 2a \\ 1 & \cos b & \cos 2b \\ 1 & \cos c & \cos 2c \end{vmatrix}$ .

41. Déterminer, sur son domaine de définition, une primitive de la fonction  $t \mapsto \frac{1}{t^2 + 4t + 8}$ .

42. Énoncés des Théorèmes de changement de variables et d'intégration par parties pour les intégrales généralisées. (**Théorème 7.23** et **Théorème 7.24**).

43. a. Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , l'intégrale  $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$  est convergente.

b. Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a :  $\int_0^{+\infty} t^{n+1} e^{-t} dt = (n+1) \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$ .

c. En déduire, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la valeur de  $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$ .

44. Énoncés des Théorèmes de changement de variables et d'intégration par parties pour les intégrales généralisées. (**Théorème 7.23** et **Théorème 7.24**).

45. Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , l'intégrale  $I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$  est convergente puis que  $I_n = n!$ .

46. Énoncé du Théorème de permutation somme infinie et intégrale (**Théorème 7.32**).

**Application.** Montrer que  $\int_0^{+\infty} \frac{t dt}{e^t - 1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ .

47. Déterminer le polynôme caractéristique puis les valeurs propres de  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ .

48. Soient  $F, G$  deux sous-espaces vectoriels supplémentaires d'un espace vectoriel  $E$  de dimension finie et  $p$  la projection sur  $F$  parallèlement à  $G$ . Quel est le polynôme caractéristique de  $p$  ?

49. Conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  soit diagonalisable / trigonalisable. (**Théorème 8.18** et **Théorème 8.20**).

50. Déterminer le polynôme caractéristique puis les valeurs propres de  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ .

51. Soient  $F, G$  deux sous-espaces vectoriels supplémentaires d'un espace vectoriel  $E$  de dimension finie et  $p$  la projection sur  $F$  parallèlement à  $G$ . Quel est le polynôme caractéristique de  $p$  ?

52. Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

a. Montrer que, pour tout  $\alpha \in \mathbb{K}$ , on a :

$$\lambda \text{ valeur propre de } A + \alpha I \iff \lambda - \alpha \text{ valeur propre de } A.$$

b. Montrer que, pour tout  $P \in \mathbb{K}[X]$  :

$$\lambda \text{ valeur propre de } A \implies P(\lambda) \text{ valeur propre de } P(A).$$

c. Montrer que, si  $P \in \mathbb{K}[X]$  annule  $A$  alors

$$\text{Sp}(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{K} : P(\lambda) = 0\}.$$

53. Vrai ou Faux ? Dans chaque cas on justifiera (avec une preuve si c'est vrai, avec un contre-exemple si c'est faux).

- a. Toute matrice est diagonalisable dans  $\mathbb{C}$ .
- b. Toute matrice est trigonalisable dans  $\mathbb{R}$ .
- c. Si  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est diagonalisable, alors  $A^2$  aussi.  
La réciproque est vraie aussi.
- d. La somme de deux matrices diagonalisables est diagonalisable.

54. Énoncés du Théorème de limite monotone pour les suites d'événements (**Théorème 9.21**), de la formule des probabilités totales (deux versions) (**Théorème 9.20** et **Théorème 9.28**) et de la formule des probabilités composées (**Théorème 9.31**).

55. Dans une population, la probabilité qu'une famille ait  $n$  enfants est estimée par la valeur  $p_n = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$ , avec  $\lambda \simeq 2$ .
- a. On note  $(A_n)_{n \geq 0}$  la suite d'événements où  $A_n$  est réalisé si et seulement si une famille a  $n$  enfants. Vérifier que  $(A_n)$  est un système quasi-complet d'événements.
  - b. On suppose que les sexes sont équiprobables et qu'il y a indépendance des sexes des enfants à l'intérieur d'une même famille. Calculer de la probabilité qu'une famille ait au moins une fille.

56. Énoncé et démonstration du lemme d'Abel. Définition du rayon de convergence. Dessin explicatif.  
Explication des conséquences du lemme sur la détermination du rayon de convergence.

57. Déterminer, en détaillant les précautions prises, le rayon de convergence de la série entière  $\sum \frac{\sqrt{n}}{2n+1} z^{2n}$ .

58. Énoncé des théorèmes de dérivation et d'intégration terme à terme.

**Application.** Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière  $\sum \frac{x^{n+1}}{n+1}$ .

59. Développements en série entière usuels (**Section 3.3** page 12).

60. Montrer que  $x \mapsto \cos^3(x)$  est développable en série entière sur  $\mathbb{R}$  et expliciter le développement.

61. On considère la série entière  $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n n!} x^{2n}$ .

- a. Déterminer le rayon de convergence de la série et exprimer sa somme  $f$  à l'aide de fonctions usuelles.
- b. Vérifier que  $f$  est solution de l'équation différentielle  $y'' + xy' + y = 1$ .
- c. En déduire l'unique solution du problème de Cauchy  $\begin{cases} y'' + xy' + y = 1 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$

62. Énoncé de la formule d'Al-Kashi (**Proposition 11.3**), de l'inégalité de Cauchy-Schwarz (**Théorème 11.4**), de l'inégalité triangulaire (**Proposition 11.5**) et du théorème de Pythagore (**Théorèmes 11.7, 11.8**) dans un espace pré-hilbertien réel  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ .

63. Soient  $n \in \mathbb{N}$  et  $a \in \mathbb{R}$ . Démontrer que l'application  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  définie sur  $\mathbb{R}_n[X]^2$  par

$$(P, Q) \mapsto \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(a) Q^{(k)}(a)}{(k!)^2}$$

définit un produit scalaire sur  $\mathbb{R}_n[X]$ .

Vérifier que la famille  $(P_j)_{0 \leq j \leq n}$  est orthonormée pour ce produit scalaire, où  $P_j(X) = (X - a)^j$ .

64. Dans  $\mathbb{R}^3$  muni du produit scalaire canonique, orthonormaliser en suivant le procédé de Gram-Schmidt la base  $(u_1, u_2, u_3)$  où

$$u_1 = (1, 0, 1), \quad u_2 = (1, 1, 1), \quad u_3 = (-1, -1, 0).$$

65. Soient  $E$  un espace pré-hilbertien muni d'un produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  et  $f \in \mathcal{L}(E)$ . Montrer que, si  $f$  est représenté, dans une base orthonormée de  $E$ , par une matrice symétrique, alors  $\text{Ker}(f)$  et  $\text{Im}(f)$  sont orthogonaux.  
Soit  $p$  un projecteur de  $E$ . Montrer que  $p$  est un projecteur orthogonal de  $E$  si et seulement si il est représenté, dans

une base orthonormée, par une matrice symétrique.

66. Soient  $E$  un espace euclidien et  $H$  un hyperplan de  $E$  de vecteur normal  $u$ . Donner l'expression, en détaillant toutes les étapes, pour tout  $x \in E$  de la distance de  $x$  à  $H$  (en fonction de  $x$  et de  $u$ ).

67. Dans  $\mathbb{R}^4$  muni de son produit scalaire canonique, on considère  $F$  le sous-espace vectoriel défini par

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y + t = 0 \text{ et } x + y + 2z - t = 0\}.$$

Déterminer le projeté orthogonal de  $u = (1, 8, 1, 1)$  sur  $F$ .

68. Résoudre, sur  $\mathbb{R}$ , l'équation différentielle

$$t^2 y' + y = 1.$$

69. Déterminer, en cherchant la solution sous forme d'une fonction développable en série entière, la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'' + xy' + y &= 1 \\ y(0) &= 0 \\ y'(0) &= 0 \end{cases}$$

70. Résoudre sur  $\mathbb{R}_+^*$  (et sur  $\mathbb{R}_-^*$ ) l'équation différentielle

$$t^2 y'' + 4ty' + (2 - t^2)y = 1$$

en posant  $z : t \mapsto t^2 y(t)$ . Étudier le recollement en 0.

71. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  canoniquement associé à la matrice

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2\sqrt{2} & 0 \\ 2\sqrt{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

72. Expliciter, dans la base canonique, la matrice de l'endomorphisme  $\psi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ , composé du demi-tour d'axe dirigé par  $u = (1, 0, 1)$  et de l'homothétie de rapport 3.

73. Déterminer les coordonnées et la nature de l'unique point critique de la fonction  $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \ln(1 + 2x^2 + y^2) - y$ .

74. Résoudre, sur l'ouvert  $\mathcal{U} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$ , l'équation aux dérivées partielles :  $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = \sqrt{x^2 + y^2}$  en passant en coordonnées polaires.

75. On considère une parabole  $(\mathcal{P})$  de directrice  $\mathcal{D}$  et de foyer  $F$ .

Soit  $M$  un point de  $(\mathcal{P})$ ,  $H$  son projeté orthogonal sur  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{T}$  la tangente à  $(\mathcal{P})$  en  $M$ .

Faire un dessin, puis montrer que  $\mathcal{T}$  est la médiatrice de  $[FH]$ .

76. Déterminer la nature, les éventuels centres et axes de symétrie et sommets, puis tracer, la conique définie par son équation cartésienne dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$

$$(\Gamma) : \quad x^2 + xy + y^2 - 1 = 0.$$

77. Reproduction du **Tableau de synthèse** (page 9).

Classification des courbes algébriques de degré 2 selon le signe du déterminant de la matrice associée à la partie quadratique.

78. Déterminer la nature, les coordonnées du centre éventuel, l'équation réduite puis le paramétrage dans le repère initial de la conique d'équation

$$9x^2 + 4y^2 - 54x + 40y + 145 = 0.$$

79. Montrer que la ligne de niveau de  $f : (x, y) \mapsto 2x^2 y + 2x^2 + y^2$  passant par  $(1, 1)$  admet une tangente en ce point. En donner une équation.

80. Démontrer que la fonction  $x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{\sqrt{x+t}} dt$  est définie et continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ . (On pourra utiliser une domination locale).