



19

Étude métrique des courbes

Dans ce dernier chapitre, on revient sur l'étude des courbes (paramétrées) planes introduites dans le **Chapitre 3**. On y introduit la notion d'*abscisse curviligne*, qui permet de calculer la «longueur» d'une courbe du plan, ainsi que les notions de *centre et rayon de courbure*, qui permettent de définir le *cercle de courbure* en un point d'une courbe (le cercle dont la forme «épouse» localement la courbe au mieux).

Sauf mention du contraire, on considère tout au long du chapitre une courbe Γ paramétrée par

$$M : t \in I \mapsto M(t) = (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2.$$

1 Abscisse curviligne et longueur d'arc

1.1 Longueur d'un arc paramétré

Définition 19.1.

Longueur d'un arc régulier

Soit $(a, b) \in I^2$ avec $a \leq b$. La **longueur** d'un arc paramétré par M du point $M(a)$ au point $M(b)$ est la quantité

$$\ell_{\Gamma}(a, b) = \int_a^b \left\| \frac{d\vec{M}}{dt}(t) \right\| dt = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt.$$

Proposition 19.1.

La longueur d'un arc paramétré entre deux de ses points est une notion géométrique : elle ne dépend pas de la paramétrisation M de l'arc.

Preuve. Si $\varphi : J \rightarrow I$ est une fonction bijective de classe \mathcal{C}^1 définie sur un intervalle J de \mathbb{R} , alors les courbes paramétrées $M : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ et par $\tilde{M} = M \circ \varphi : J \rightarrow \mathbb{R}^2$ ont le même support.

Supposons que la fonction φ est strictement croissante - donc $\varphi'(u) > 0$ - (le calcul est analogue si φ est strictement décroissante, il suffit de permuter les bornes ce qui est compensé avec le signe - de $\varphi'(u)$), on obtient avec la formule du changement de variable que

$$\begin{aligned} \ell_M(a, b) &= \int_a^b \|M'(t)\| dt \stackrel{t=\varphi(u)}{=} \int_c^d \|M'(\varphi(u))\| \varphi'(u) du = \int_c^d \|M'(\varphi(u))\varphi'(u)\| du \\ &= \int_c^d \|\tilde{M}'(u)\| du = \ell_{\tilde{M}}(c, d) \end{aligned}$$

□

Remarque 19.1.

Si M est la loi horaire d'un mouvement, le nombre $\left\| \frac{d\vec{M}}{ds} \right\|$ est la vitesse de l'objet à l'instant t .

La longueur de l'arc est alors le produit de la vitesse moyenne par la durée du mouvement entre $M(a)$ et $M(b)$: c'est bien la longueur au sens usuel du terme.

Exemple 19.1.**Longueur d'un segment**

Soient A, B deux points du plan et $M(t) = A + t\overrightarrow{AB}$, $t \in [0, 1]$ un paramétrage du segment $\Gamma = [AB]$. On a : $\ell_{\Gamma}(0, 1) = \|\overrightarrow{AB}\|$.

Exemple 19.2.**Périmètre du cercle**

La longueur d'arc de la courbe Γ paramétré par la fonction $M : t \mapsto (\cos(t), \sin(t))$ du point $M(0) = (1, 0)$ au point $M(2\pi) = (1, 0)$ est égale à

$$\ell_{\Gamma}(0, 2\pi) = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-\sin(t))^2 + (\cos(t))^2} dt = \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi.$$

On retrouve le périmètre du cercle trigonométrique.

Remarque 19.2.

Attention ! La quantité $\ell_{\Gamma}(a, b)$ est appelée **longueur d'arc** et non longueur de la courbe. En effet, il s'agit de la longueur parcourue par le point $M(t)$ entre les instants $t = a$ et $t = b$. En particulier, on peut parcourir plusieurs fois la courbe avant de s'arrêter.

La longueur mesure alors la **totalité du trajet parcouru** et pas simplement la distance sur la courbe entre le point de départ et le point d'arrivée.

Par exemple, la longueur d'arc de la courbe Γ paramétrée par $M : t \mapsto (\cos(t), \sin(t))$ du point $M(0) = (1, 0)$ au point $M(4\pi) = (1, 0)$ est égale à

$$\ell_{\Gamma}(0, 4\pi) = \int_0^{4\pi} \sqrt{(-\sin(t))^2 + (\cos(t))^2} dt = \int_0^{4\pi} 1 dt = 4\pi$$

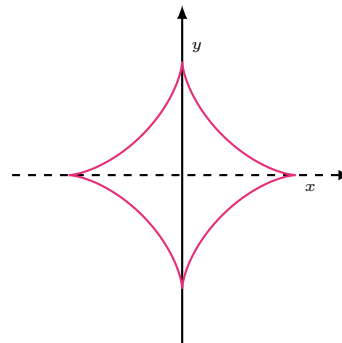
tandis que le périmètre du cercle est seulement de 2π . Cette différence provient du fait que lorsque la variable t décrit l'intervalle $[0, 4\pi]$, le point $M(t)$ effectue deux fois le tour du cercle trigonométrique.

Exercice 19.1.**Longueur d'arc de l'astroïde**

Calculer la longueur d'arc du support l'astroïde paramétrée par

$$\begin{cases} x(t) = a \cos^3(t) \\ y(t) = a \sin^3(t) \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

avec $a > 0$.

**1.2 Abscisse curviligne****Définition 19.2.****Abcisse curviligne**

On appelle **abscisse curviligne** pour Γ toute application $s \in \mathcal{C}^1(I)$ telle que

$$\forall t \in I, s'(t) = \left\| \frac{d\vec{M}}{dt}(t) \right\|.$$

Remarque 19.3.

Le théorème fondamental de l'analyse affirme que la fonction

$$t \mapsto \sqrt{\left\langle \frac{d\vec{M}}{dt}(t) \mid \frac{d\vec{M}}{dt}(t) \right\rangle} = \left\| \frac{d\vec{M}}{dt}(t) \right\|$$

admet une infinité primitives (de classe \mathcal{C}^1) et donc Γ admet une infinité d'abscisses curvilignes, deux d'entre elles étant égales à une constante près.

On se donne alors un point de référence $t_0 \in I$ et on parle alors d'abscisse curviligne d'origine t_0 , comme énoncé plus bas.

Exercice 19.2.

On considère la courbe représentative \mathcal{C} de la fonction ch qui admet pour paramétrage $M : t \mapsto (t, \text{ch}(t))$.

Calculer l'abscisse curviligne d'origine 0 pour \mathcal{C} .

Remarque 19.4.

Si $s : I \rightarrow \mathbb{R}$ est une abscisse curviligne pour Γ , et s'il existe $t_0 \in I$ tel que $s(t_0) = 0$, alors

$$\forall t \in I, \quad s(t) = \int_{t_0}^t \left\| \frac{d\vec{M}}{dt}(t) \right\| dt = \ell_{\Gamma}(t_0, t),$$

et le réel t_0 est appelé l'**origine** de s sur Γ .

La formule $s(t) = \ell_{\Gamma}(t_0, t)$ donne l'étymologie de l'abscisse curviligne: c'est une abscisse que l'on lirait sur la courbe et non plus sur les axes de coordonnées. Le signe indique si l'on se trouve «avant» ou «après» t_0 .

Exemple 19.3.

L'abscisse curviligne d'origine 0 de la courbe Γ paramétrée par $M : t \mapsto (\cos(t), \sin(t))$ est la fonction

$$s : t \mapsto \int_0^t \sqrt{(-\sin(u))^2 + (\cos(u))^2} du = \int_0^t 1 du = t.$$

Par définition, l'abscisse curviligne s d'origine t_0 est une fonction de classe \mathcal{C}^1 . De plus, si, comme ici, la courbe paramétrée par M est **régulière**, on a

$$\forall t \in I, \quad s'(t) = \left\| \frac{d\vec{M}}{dt}(t) \right\| > 0.$$

Par le théorème de la bijection monotone (et son extension pour le caractère \mathcal{C}^1 de la bijection réciproque), on en déduit que s réalise une bijection de I sur l'intervalle $J = s(I)$ et que son application réciproque $s^{-1} : J \rightarrow I$ est de classe \mathcal{C}^1 sur J .

L'application $\tilde{M} = M \circ s^{-1} : J \rightarrow \mathbb{R}^2$ est un nouveau paramétrage de la courbe.

Remarque 19.5.**Paramétrisation par longueur d'arc pour une courbe régulière**

Considérons une paramétrisation M d'une courbe régulière Γ .

- ✗ En pratique, en posant $s = \varphi(t)$, on considère que toute fonction $h : I \rightarrow \mathbb{R}$ de la variable t est aussi une fonction de la variable s via $t = \varphi^{-1}(s)$. En particulier, la formule de dérivation d'une composée donne

$$\frac{dh}{ds} = \frac{dh}{dt} \times \frac{dt}{ds} = \left(\frac{ds}{dt} \right)^{-1} \times \frac{dh}{dt} = \frac{1}{\|f'(t)\|} \times \frac{dh}{dt}$$

- ✗ En tout point, le vecteur $\frac{d\vec{M}}{ds}$ est alors de norme 1. En effet, d'après la formule précédente, on a

$$\frac{d\vec{M}}{ds} = \frac{1}{\|M'(t)\|} \times \frac{d\vec{M}}{dt} = \frac{M'(t)}{\|M'(t)\|} \implies \left\| \frac{d\vec{M}}{ds} \right\| = 1.$$

On obtient alors un parcours de Γ à *vitesse constante*.

2 Repère de Frenet

2.1 Repère de Frenet

Définition 19.3.

Repère de Frenet associé à un point régulier

Soit $M(t)$ un point **régulier** de Γ .

On appelle **repère de Frenet** la courbe paramétrée au point $M(t)$ le repère **orthonormé direct** $(M(t), \vec{T}_t, \vec{N}_t)$ où \vec{T}_t est le vecteur tangent unitaire de Γ en $M(t)$ défini par

$$\vec{T}_t = \frac{1}{\left\| \frac{d\vec{M}}{dt}(t) \right\|} \frac{d\vec{M}}{dt}(t) = \frac{1}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}} \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}.$$

Il découle de cette définition que

$$\vec{N}_t = \frac{1}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}} \begin{pmatrix} -y'(t) \\ x'(t) \end{pmatrix}.$$

Remarque 19.6.

De manière abusive, on écrira $\vec{T}_t = \frac{d\vec{M}}{ds}$.

Cette relation a le mérite de souligner que si la courbe est paramétrée par l'abscisse curviligne, alors il suffit de dériver le vecteur position pour obtenir le vecteur tangente unitaire.

Exemple 19.4.

Repère de Frenet et cardioïde

On considère la (demi-)cardioïde paramétrée par

$$\begin{cases} x(t) = 2 \cos(t) - \cos(2t) \\ y(t) = 2 \sin(t) - \sin(2t) \end{cases}, \quad t \in [0, \pi].$$

Soit $M(t)$, $t \neq 0$, un point **régulier**.

Observant que

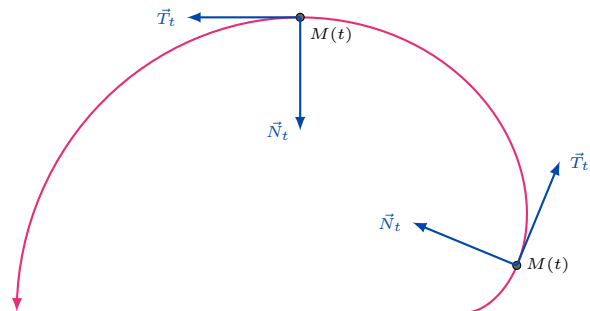
$$(\sin(2t) - \sin(t))^2 + (\cos(t) - \cos(2t))^2 = 4 \sin^2\left(\frac{t}{2}\right),$$

on obtient que

$$\vec{T}_t = \frac{1}{2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)} \begin{pmatrix} \sin(2t) - \sin(t) \\ \cos(t) - \cos(2t) \end{pmatrix},$$

et

$$\vec{N}_t = \frac{1}{2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)} \begin{pmatrix} \cos(2t) - \cos(t) \\ \sin(2t) - \sin(t) \end{pmatrix}.$$



Exercice 19.3.

Déterminer le repère de Frenet en tout point régulier de la parabole $\begin{cases} x = 2pt^2 \\ y = 2pt \end{cases}$ où $p > 0$ est fixé.

Exercice 19.4.

Déterminer le repère de Frenet en tout point régulier de l'astroïde.

3 Courbure et développée d'un arc

3.1 Courbure et détermination angulaire

Dans cette section, on suppose que le paramétrage M de Γ est de classe \mathcal{C}^2 .

Par définition du repère de Frenet, on a la relation

$$\forall t \in I, \quad \langle \vec{T}_t \mid \vec{T}_t \rangle = \|\vec{T}_t\|^2 = 1.$$

Comme on a supposé que M est \mathcal{C}^2 , la fonction vectorielle $\vec{T} : t \mapsto \vec{T}_t$ est dérivable. En dérivant la relation précédente, on obtient que

$$\forall t \in I, \quad \left\langle \frac{d\vec{T}}{dt}(t) \mid \vec{T}(t) \right\rangle = 0$$

Finalement, en utilisant la relation $\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{dt}{ds} \times \frac{d\vec{T}}{dt}$, on aboutit à

$$\forall t \in I, \quad \left\langle \frac{d\vec{T}}{ds}(t) \mid \vec{T}(t) \right\rangle = 0.$$

On en déduit que les vecteurs $\frac{d\vec{T}}{ds}(t)$ et \vec{N}_t sont colinéaires pour tout $t \in I$, ce qui nous permet de considérer la définition suivante.

Définition 19.4.

Courbure

i. Soit $M(t)$ un point régulier de Γ .

On appelle **courbure** en $M(t)$ à Γ le réel $\gamma(t)$ défini par la relation $\frac{d\vec{T}}{ds}(t) = \gamma(t)\vec{N}_t$.

ii. Si Γ est régulière (et donc M est un paramétrage régulier), on appelle **courbure** de M la fonction $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall t \in I, \quad \frac{d\vec{T}}{ds}(t) = \gamma(t)\vec{N}_t.$$

Remarque 19.7.

La courbure est une notion géométrique ; elle ne dépend pas de la paramétrisation de la courbe.

Exemple 19.5.

Courbure d'une droite

Considérons une droite \mathcal{D} passant par (x_0, y_0) et dirigée par $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et donc paramétrée par

$$M : t \in \mathbb{R} \mapsto (x_0 + at, y_0 + bt).$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, un calcul immédiat donne

$$\vec{T}_t = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad \vec{N}_t = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad \frac{ds}{dt}(t) = \left\| \frac{d\vec{M}}{dt}(t) \right\| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Il suit que

$$\frac{d\vec{T}}{ds}(t) = \frac{dt}{ds} \times \frac{d\vec{T}}{dt}(t) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \times \vec{0} = \vec{0} = 0 \times \vec{N}_t$$

et la courbure de la droite est nulle.

Exemple 19.6.

Courbure d'un cercle

Considérons maintenant le cercle \mathcal{C} de centre $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ et de rayon $R > 0$, paramétré par

$$M : t \mapsto (x_0 + R \cos(t), y_0 + R \sin(t)).$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a par un calcul direct que

$$\vec{T}_t = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}, \quad \vec{N}_t = \begin{pmatrix} -\cos(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \frac{ds}{dt}(t) = \left\| \frac{d\vec{M}}{dt}(t) \right\| = R.$$

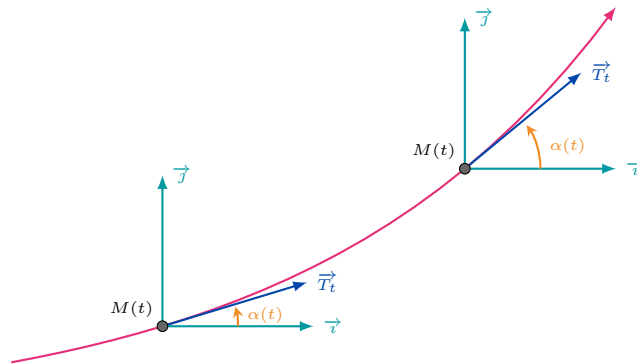
Il suit que

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{dt}{ds} \times \frac{d\vec{T}}{dt} = \left(\frac{ds}{dt} \right)^{-1} \times \frac{d\vec{T}}{dt} = \frac{1}{R} \times \vec{N}_t$$

donc la courbure γ est constante de valeur $1/R$.

Continuons nos observations. Soit $t \in \mathbb{R}$ tel quel $M(t)$ est régulier. Le vecteur \vec{T}_t est unitaire ; il existe alors $\alpha(t)$ tel que

$$\vec{T}_t = \cos(\alpha(t))\vec{i} + \sin(\alpha(t))\vec{j}.$$



Théorème & Définition 19.1.

Soit M un paramétrage de Γ de classe \mathcal{C}^1 , tel que tout point $M(t)$ soit régulier. Il existe alors une application $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 telle que :

$$\forall t \in I, \vec{T}_t = \cos(\alpha(t))\vec{i} + \sin(\alpha(t))\vec{j}.$$

La fonction α est appelée **détermination angulaire** associée au repère de Frenet.

Théorème de relèvement et détermination angulaire

Preuve. Résultat admis. □

Théorème 19.2.

Si $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$ est une application de classe \mathcal{C}^1 telle que

$$\forall t \in I, \vec{T}_t = \begin{pmatrix} \cos(\alpha(t)) \\ \sin(\alpha(t)) \end{pmatrix},$$

alors, on a les relations, notant $\vec{N} : t \mapsto N_t$,

$$\frac{d\vec{T}}{ds}(t) = \gamma(t)\vec{N}_t, \quad \frac{d\vec{N}}{ds}(t) = -\gamma(t)\vec{T}_t, \quad \frac{d\alpha}{ds}(t) = \gamma(t).$$

Formules de Frenet

Remarque 19.8.

La troisième formule de Frenet nous permet d'interpréter géométriquement la courbure :

- ✗ La courbure est positive si et seulement si la fonction α est croissante. Dans ce cas, la courbe «tourne à gauche (selon l'orientation du plan euclidien)».
- ✗ La courbure est négative si et seulement si la fonction α est décroissante. Dans ce cas, la courbe «tourne à droite (selon l'orientation du plan euclidien)».
- ✗ Plus la courbure est grande en valeur absolue, plus la variation de α est rapide : la courbe «prend un virage serré». *A contrario*, plus la courbure est petite en valeur absolue, plus la variation de α est lente : la courbe «prend un virage ample».

Exemple 19.7.

Reprenons l'**Exemple 19.6** du cercle. Pour tout $t \in [0, 2\pi]$,

$$\vec{T}_t = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t + \frac{\pi}{2}) \\ \sin(t + \frac{\pi}{2}) \end{pmatrix},$$

ainsi $\alpha : t \mapsto t + \frac{\pi}{2}$ est une détermination angulaire associée au repère de Frenet. On observe que

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{dt}{ds} \times \frac{d\alpha}{dt} = \frac{1}{R} \times \alpha'(t) = \frac{1}{R},$$

qui est bien la valeur qu'on avait trouvée pour la courbure en $M(t)$.

3.2 Cercle osculateur et développée d'un arc

On commence par rappeler la définition suivante.

Définition 19.5.

Point birégulier

Un point $M(t)$ de Γ est dit **birégulier** si la famille $\left(\frac{d\vec{M}}{dt}(t), \frac{d^2\vec{M}}{dt^2}(t)\right)$ est libre.
 Γ est birégulière si tout point de Γ est birégulier.

En admettant la formule **hors-programme** suivante

$$\gamma(t) = \frac{1}{\left\|\frac{d\vec{M}}{dt}(t)\right\|^3} \det\left(\frac{d\vec{M}}{dt}(t), \frac{d^2\vec{M}}{dt^2}(t)\right),$$

on voit que $M(t)$ est birégulier si et seulement si $\gamma(t) \neq 0$.

Définition 19.6.

Cercle, centre et rayon de courbure

Soit $M(t)$ un point birégulier de la courbe.

- i. On appelle **rayon de courbure** au point $M(t)$ le nombre $R(t) = \frac{1}{\gamma(t)}$.
- ii. On appelle **centre de courbure** au point $M(t)$ le point $C(t)$ défini par la relation $C(t) = M(t) + R(t)\vec{N}_t$.
- iii. On appelle **cercle de courbure** (ou cercle osculateur) au point $M(t)$ le cercle de centre $C(t)$ et de rayon $|R(t)|$.

Définition 19.7.

Développée d'un arc birégulier

On appelle **développée** d'un arc **birégulier** l'ensemble de ses centres de courbures.

Exemple 19.8.

Chaînette

Considérons la courbe de la fonction $f : t \mapsto \text{ch}(t)$ dont une paramétrisation birégulière est naturellement

$$M : t \mapsto (t, \text{ch}(t)).$$

On a immédiatement, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\frac{ds}{dt} = s'(t) = \left\|\frac{d\vec{M}}{dt}(t)\right\| = \sqrt{1 + \text{sh}^2(t)} = \text{ch}(t).$$

Il suit que

$$\vec{T}_t = \begin{pmatrix} 1 \\ \text{ch}(t) \\ \text{sh}(t) \\ \text{ch}(t) \end{pmatrix}, \quad \vec{N}_t = \begin{pmatrix} -\text{sh}(t) \\ \text{ch}(t) \\ 1 \\ \text{ch}(t) \end{pmatrix}, \quad \text{puis} \quad \frac{d\vec{T}}{dt}(t) = \begin{pmatrix} -\text{sh}(t) \\ \text{ch}^2(t) \\ 1 \\ \text{ch}^2(t) \end{pmatrix} = \frac{dt}{ds} \times \vec{N}_t$$

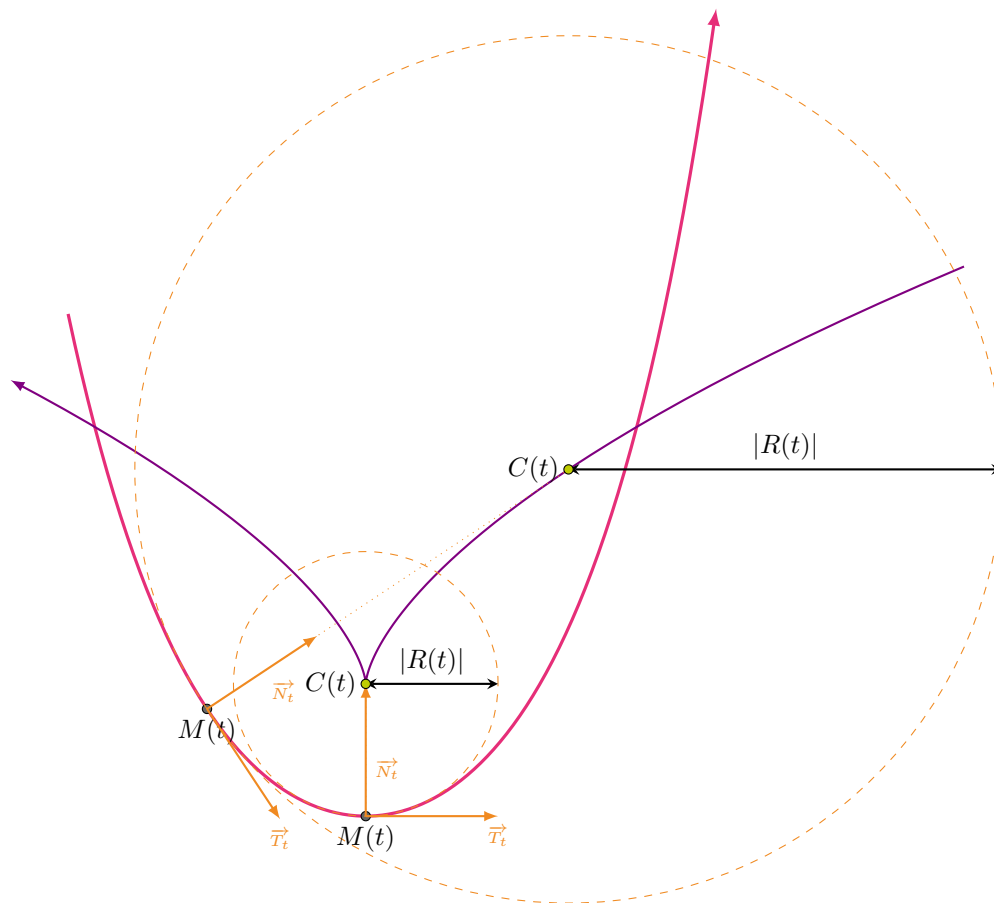
ce qui implique que

$$\frac{d\vec{T}}{ds}(t) = \frac{dt}{ds} \times \frac{d\vec{T}}{dt}(t) = \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 \times \vec{N}_t = \gamma(t)\vec{N}_t.$$

Finalement, on obtient :

$$R(t) = \frac{1}{\gamma(t)} = \text{ch}^2(t), \quad C(t) = (t - \text{ch}(t)\text{sh}(t), 2\text{ch}(t)).$$

Sa développée est la courbe paramétrée par $t \mapsto C(t)$, représentée en violet sur la figure ci-dessous.



Exercice 19.5.

On considère l'ellipse paramétrée par

$$t \in [-\pi, \pi] \mapsto (2 \cos(t), \sin(t)).$$

1. Vérifier qu'il s'agit d'un paramétrage birégulier.

2. Montrer que, pour tout $t \in [-\pi, \pi]$, on a $\gamma(t) = \frac{2}{(3 \sin^2(t) + 1)^{3/2}}$.

3. En déduire que la développée de l'ellipse est une astéroïde dont on précisera un paramétrage.

Théorème 19.3.

La développée d'un arc birégulier est l'enveloppe de la famille de ses normales.

Preuve. Il s'agit de montrer que l'enveloppe de la famille $(\mathcal{D}_t)_{t \in I}$ est bien la courbe paramétrée par

$$C : t \in I \mapsto M(t) + R(t)\vec{N}_t.$$

Soit $t \in I$ fixé. La droite \mathcal{D}_t normale à la courbe Γ en $M(t)$ est elle-même paramétrée par

$$\mathcal{D}_t : M(t) + \lambda \vec{N}_t, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

On cherche alors un paramétrage de l'enveloppe \mathcal{E} de la forme

$$\mu : t \in I \mapsto M(t) + \lambda(t)\vec{N}_t,$$

où λ est une fonction de classe \mathcal{C}^2 à déterminer. Il suffit finalement de montrer que $\lambda(t) = R(t)$.

La tangente à \mathcal{E} en $\mu(t)$ est dirigée par

$$\frac{d\vec{\mu}}{dt}(t) = \frac{d\vec{M}}{dt}(t) + \lambda'(t)\vec{N}_t + \lambda(t) \times \frac{d\vec{N}}{dt}(t).$$

La tangente ci-dessus et la droite \mathcal{D}_t sont alors confondues si et seulement si les vecteurs $\frac{d\vec{\mu}}{dt}(t)$ et \vec{N}_t sont colinéaires, ce qui est équivalent à ce que leur déterminant soit nul. Mais, par propriétés du déterminant, puis par les formules de Frenet,

$$\begin{aligned} \det\left(\frac{d\vec{\mu}}{dt}(t), \vec{N}_t\right) &= \det\left(\frac{d\vec{M}}{dt}(t), \vec{N}_t\right) + \lambda(t) \det\left(\frac{d\vec{N}}{dt}(t), \vec{N}_t\right) \\ &= \frac{ds}{dt} \times \det\left(\frac{d\vec{M}}{ds}(t), \vec{N}_t\right) + \frac{ds}{dt} \times \lambda(t) \det\left(\frac{d\vec{N}}{ds}(t), \vec{N}_t\right) \\ &= \frac{ds}{dt} \times \det(\vec{T}_t, \vec{N}_t) + \frac{ds}{dt} \times \lambda(t) \det(-\gamma(t)\vec{T}_t, \vec{N}_t) \end{aligned}$$

Or, la base (\vec{T}_t, \vec{N}_t) est directe, ce qui veut dire que $\det(\vec{T}_t, \vec{N}_t) = 1$. Il suit que

$$\frac{d\vec{\mu}}{dt}(t) \text{ et } \vec{N}_t \text{ colinéaires} \iff 0 = \frac{ds}{dt} (1 - \gamma(t)\lambda(t)) \iff \lambda(t) = \frac{1}{\gamma(t)} = R(t),$$

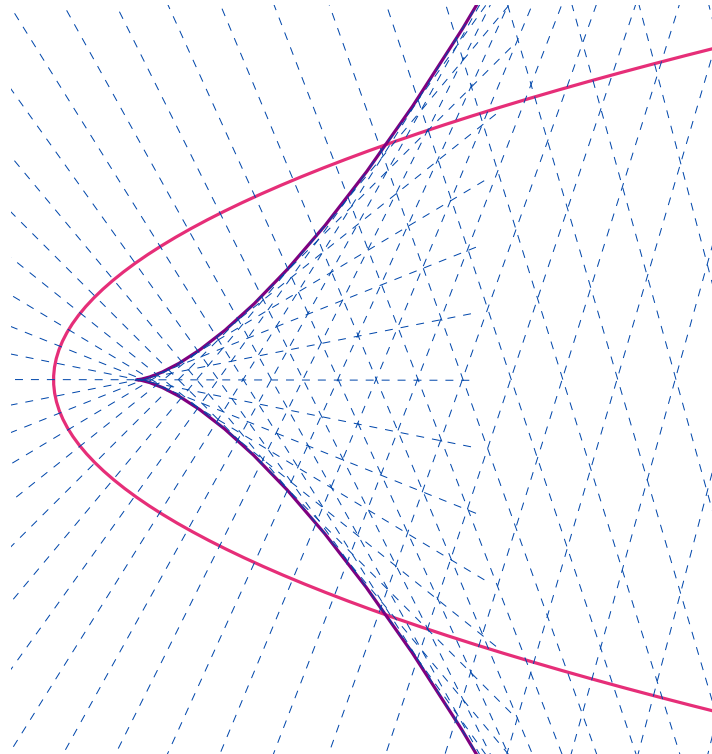
ce qu'on voulait et conclut la démonstration. □

Exercice 19.6.

Déterminer la développée de la parabole paramétrée par $\begin{cases} x = 2pt^2 \\ y = 2pt \end{cases}$

où $p > 0$ est fixé.

Indication : On déterminera l'enveloppe de la famille des normales de la parabole.



4 Sélection d'exercices

Exercice 19.7.

Calculer la longueur de la courbe d'équation $y = x\sqrt{x}$ entre les points d'abscisse $x = 0$ et $x = 1$.

Exercice 19.8.

Calculer la longueur de boucle de la courbe paramétrée par $x(t) = 3t^2 - 1$ et $y(t) = 3t^3 - t$.

Exercice 19.9.

Déterminer puis tracer la développée de la courbe plane (C) d'équation $y = e^x$.

Exercice 19.10.

On considère un arche de *cycloïde* Γ , paramétrée par $\begin{cases} x = R(t - \sin t) \\ y = R(1 - \cos t) \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$.

Déterminer la développée Γ , et montrer que celle-ci est l'image de Γ par une translation.

Exercice 19.11.

Déterminer puis tracer la développée de la courbe plane (C) d'équation $xy^2 = a^3$, où a est un réel non nul fixé.

On commencera par obtenir une paramétrisation de (C) .

Exercice 19.12.**Tractrice**

On pose $\forall t \in \mathbb{R}$, $\operatorname{tgh}(t) = \frac{\operatorname{sh}(t)}{\operatorname{ch}(t)}$.

1. Tracer la courbe Γ (appelée *tractrice*) paramétrée par $\begin{cases} x = t - \operatorname{tgh}(t) \\ y = \frac{1}{\operatorname{ch}(t)} \end{cases} \quad \text{où } t \in \mathbb{R}$.

2. Déterminer le centre de courbure en tout point régulier de Γ .

3. Tracer la développée de Γ .

Exercice 19.13.

Déterminer un paramétrage, puis tracer la développée de l'ellipse d'équation cartésienne $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

Exercice 19.14.

Soit Γ l'arc défini par $\begin{cases} x = t + \sin t - 4 \sin \frac{t}{2} \\ y = 3 + \cos t - 4 \cos \frac{t}{2} \end{cases}, \quad t \in [0, 4\pi]$.

1. Étudier et tracer Γ .

2. Déterminer une abscisse curviligne sur Γ , calculer la longueur totale de Γ .

3. Pour $t \in]0, 4\pi[$, déterminer le repère de Frenet et le rayon de courbure au point de paramètre t .

4. Construire la développée de Γ .

Exercice 19.15.

Soit (C) la courbe plane paramétrée par :

$$\begin{cases} x = \ln \left(\tan \left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right) - \sin t \\ y = \cos t \end{cases}, \quad t \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[.$$

1. Donner le repère de Frenet et la développée de (C) .

2. Déterminer une équation cartésienne de la développée sous la forme $y = f(x)$.

Exercice 19.16.

On considère la courbe (Γ) paramétrée par : $\begin{cases} x(t) = \cos^2 t + \ln(\sin t) \\ y(t) = \sin t \cos t \end{cases}, \quad \text{où } t \in \mathbb{R}$.

1. Étudier et tracer Γ .

2. Calculer la longueur de l'arc de Γ limité par ses deux points singuliers.

3. Calculer le rayon de courbure en tout point de cet arc.

Exercice 19.17.

Déterminer les courbes planes \mathcal{C}^2 birégulières telles que $R = \sin \alpha$ (où R est le rayon de courbure, et α est une détermination angulaire de classe \mathcal{C}^2).