



# 3

## Courbes paramétrées

Dans tout ce chapitre, on considère l'espace euclidien  $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$  et on note  $d$  la distance associée. Sauf mention explicite du contraire,  $I$  désigne un intervalle réel (non trivial) et  $\bar{I}$  son adhérence.

### 1 Arcs (ou courbes) paramétré(e)s du plan

#### 1.1 Définitions et exemples

##### Définition 3.1.

##### Arc ou courbe paramétré(e)

On appelle **arc (ou courbe) paramétré(e)** (de classe  $\mathcal{C}^k$ ) toute partie  $\gamma$  de  $\mathbb{R}^2$  de la forme  $\gamma = \{M(t) \mid t \in I\}$ , où  $M : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $I$ .

$M$  est appelé **paramétrage** de  $\gamma$  et, réciproquement,  $\gamma$  est appelé **support** (ou trajectoire) de  $M$ .

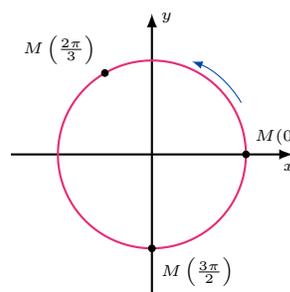
Pour tout  $t \in I$ , le point  $M(t)$  de  $\gamma$  sera appelé le point de paramètre  $t$  de  $\gamma$ .

Si  $t \mapsto x(t)$  et  $t \mapsto y(t)$  désignent les fonctions coordonnées de  $M$ , on dira que  $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ ,  $t \in I$  est un paramétrage de  $\gamma$ .

##### Exemple 3.1.

$$\begin{cases} x(t) = \cos(t) \\ y(t) = \sin(t) \end{cases}, t \in [0, 2\pi[$$

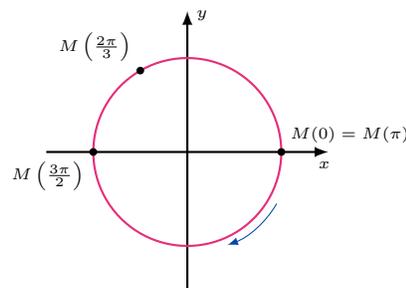
est un paramétrage du cercle unité. Le cercle est parcouru dans le sens direct (inverse des aiguilles d'une montre).



##### Exemple 3.2.

$$\begin{cases} x(t) = \cos(-2t) \\ y(t) = \sin(-2t) \end{cases}, t \in [0, 2\pi[$$

est un autre paramétrage du cercle unité. Le cercle est parcouru deux fois dans le sens des aiguilles d'une montre.

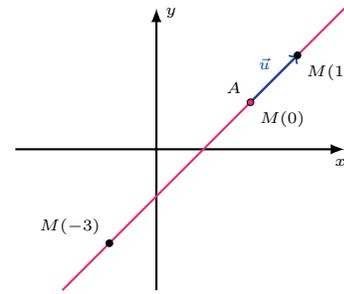


**Exemple 3.3.**

$$\begin{cases} x(t) = a + \alpha t \\ y(t) = b + \beta t \end{cases}, t \in [0, 2\pi[$$

est un paramétrage de la droite passant par le point  $A(a, b)$  et dirigée par le vecteur  $\vec{u}(\alpha, \beta)$  (que l'on note aussi  $A + \mathbb{R}\vec{u}$ ) et d'équation

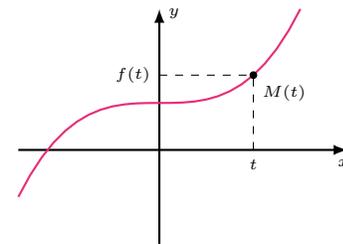
$$\beta(x - a) - \alpha(y - b) = 0.$$

**Exemple 3.4.**

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction réelle. Alors,

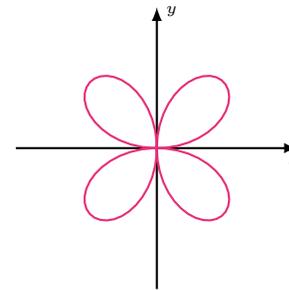
$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = f(t) \end{cases}, t \in I$$

est un paramétrage de la courbe représentative de  $f$ .

**Exemple 3.5.**

$$\begin{cases} x(t) = 2 \sin^2(t) \cos(t) \\ y(t) = 2 \cos^2(t) \sin(t) \end{cases}, t \in [0, 2\pi[$$

est un paramétrage du *quadrifolium*, ou trèfle à quatre feuilles.

**1.2 Points simples, points multiples d'une courbe paramétrée****Définition 3.2.****Point multiple**

On considère une courbe  $\gamma$  paramétrée par  $M : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Un point  $A$  de  $\gamma$  est appelé **point multiple** s'il existe (au moins) deux réels (distincts)  $t_1$  et  $t_2$  tels que  $M(t_1) = M(t_2)$  et  $t_2 - t_1$  n'est pas une période pour  $M$ .

On dira plus précisément que  $M(t)$  est double s'il correspond à deux valeurs distinctes du paramètre, triple s'il correspond à trois valeurs distinctes du paramètre, etc...

Un point qui n'est pas multiple est dit **simple**.

**Exemple 3.6.**

Dans l'**Exemple 3.1**, tous les points sont simples.

Dans l'**Exemple 3.5**, le point  $O(0, 0)$  est multiple; on y passe quatre fois (on dira qu'il est quadruple).

**Exercice 3.1.**

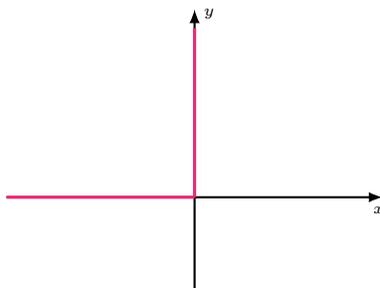
Déterminer les éventuels points doubles de la courbe paramétrée par  $\begin{cases} x(t) = 3t^3 + 2t^2 - t - 1 \\ y(t) = 3t^2 + 2t + 1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$

### 1.3 Tangente en un point

Afin de motiver la définition qui va suivre, observons un exemple de courbe paramétrée. Considérons la courbe  $\gamma$  paramétrée par  $M : t \mapsto (x(t), y(t))$  où

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x(t) = \begin{cases} -t^2, & \text{si } t < 0 \\ 0, & \text{si } t \geq 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad y(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t < 0 \\ t^2, & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

dont la représentation est la suivante.



Bien que  $M$  soit dérivable (et même de classe  $\mathcal{C}^\infty$ ) en tout point  $t \in \mathbb{R}$ , on observe que  $\gamma$  n'admet pas de tangente au point  $O(0,0)$ .

#### Définition 3.3.

#### Point régulier, courbe régulière

Soit  $\gamma$  une courbe paramétrée de classe  $\mathcal{C}^1$  paramétrée par  $M : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ . On dit que le point  $M(t_0)$  de paramètre  $t_0 \in I$  est un **point régulier** de  $\gamma$  si

$$\frac{d\vec{M}}{dt}(t_0) \neq \vec{0}.$$

Sinon, le point est dit **singulier** (ou stationnaire).

Une courbe paramétrée  $\gamma$  est dite **régulière** si tous ses points sont réguliers.

Si  $\gamma$  est de classe  $\mathcal{C}^2$ , le point  $M(t_0)$  est dit **birégulier** si la famille

$$\left( \frac{d\vec{M}}{dt}(t_0), \frac{d^2\vec{M}}{dt^2}(t_0) \right)$$

est libre.

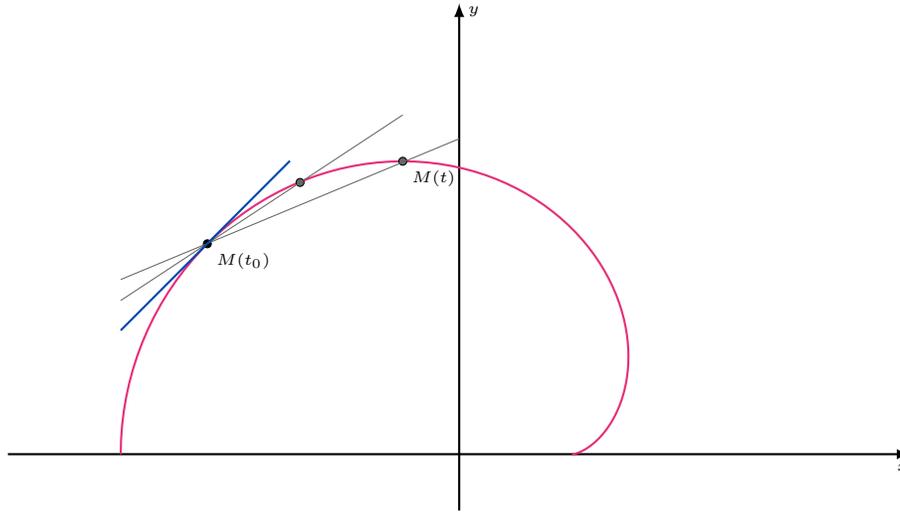
Afin de donner la définition qui va suivre, on rappelle que si  $A$  est un point du plan et  $\vec{u}$  un vecteur non nul, la droite dirigée par  $\vec{u}$  et passant par  $A$  est notée  $A + \mathbb{R}\vec{u}$ .

On dit que la courbe  $\gamma$  paramétrée par  $M : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  admet une tangente en  $M(t_0)$  si la droite  $(M(t_0)M(t))$  admet une *position limite* lorsque  $t$  tend vers  $t_0$ ; auquel cas la droite limite est la tangente.

#### Définition 3.4.

Soient  $\gamma$  une courbe paramétrée par  $M : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  et  $t_0 \in I$ . On note  $\vec{d}(t)$  un vecteur unitaire, directeur de la corde  $(M(t_0)M(t))$ .

- i. Si  $\vec{d}(t)$  admet une limite finie  $\vec{d}_0^+ \in \mathbb{R}^2$  lorsque  $t \rightarrow t_0^+$ , on dit que  $\gamma$  admet la droite  $M(t_0) + \mathbb{R}\vec{d}_0^+$  comme **tangente à droite** en  $M(t_0)$ ;
- ii. Si  $\vec{d}(t)$  admet une limite finie  $\vec{d}_0^- \in \mathbb{R}^2$  lorsque  $t \rightarrow t_0^-$ , on dit que  $\gamma$  admet la droite  $M(t_0) + \mathbb{R}\vec{d}_0^-$  comme **tangente à gauche** en  $M(t_0)$ ;
- iii. Si les tangentes à droite et à gauche existent et sont une seule et même droite  $M(t_0) + \mathbb{R}\vec{d}_0$ , celle-ci est appelée **tangente** en  $M(t_0)$  à la courbe.



### Proposition 3.1.

Soit  $\gamma$  une courbe de classe  $\mathcal{C}^1$  paramétrée par  $M : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Alors, en tout point régulier  $M(t_0)$  de  $\gamma$ . Plus précisément, la droite

$$M(t_0) + \mathbb{R} \frac{\overrightarrow{dM}}{dt}(t_0)$$

est tangente à  $\gamma$  au point  $M(t_0)$ .

*Preuve.* Soit  $M(t_0)$  un point régulier. Si  $t \in I, t \neq t_0$ , un vecteur directeur unitaire de la corde  $(M(t_0)M(t))$  est donné par

$$\begin{aligned} \vec{d}(t) &= \frac{1}{\|M(t_0) - M(t)\|} (x(t) - x(t_0), y(t) - y(t_0)) \\ &= \frac{t - t_0}{\sqrt{(x(t) - x(t_0))^2 + (y(t) - y(t_0))^2}} \left( \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}, \frac{y(t) - y(t_0)}{t - t_0} \right) \\ &= \frac{\pm 1}{\sqrt{\left(\frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}\right)^2 + \left(\frac{y(t) - y(t_0)}{t - t_0}\right)^2}} \left( \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}, \frac{y(t) - y(t_0)}{t - t_0} \right) \\ &\xrightarrow[t \rightarrow t_0]{} \frac{\pm 1}{\left\| \frac{\overrightarrow{dM}}{dt}(t_0) \right\|} (x'(t_0), y'(t_0)) =: \vec{d}_0^\pm. \end{aligned}$$

On aura observé que, comme  $M(t_0)$  est supposé régulier,  $\left\| \frac{\overrightarrow{dM}}{dt}(t_0) \right\| \neq 0$ . Comme les deux droites sont les mêmes :

$$M(t_0) + \mathbb{R} \vec{d}_0^+ = M(t_0) + \mathbb{R} \vec{d}_0^-,$$

on a bien le résultat énoncé. □

### Exercice 3.2.

Déterminer une équation de la tangente en un point quelconque de la courbe  $\gamma$  paramétrée par

$$M : t \mapsto \begin{cases} x(t) &= \cos(t) \\ y(t) &= \sin(t) \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi[.$$

Vérifier ensuite qu'elle est perpendiculaire à la droite  $(OM(t_0))$ , où  $O$  désigne l'origine du repère (et le centre du cercle dont  $M$  est une paramétrisation).

### Exemple 3.7.

Si  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction réelle de classe  $\mathcal{C}^1$ , la tangente à la courbe représentative de  $f$  au point d'abscisse  $t_0$  est également la tangente à la courbe  $\gamma$  paramétrée par  $M : t \in I \mapsto (t, f(t))$  au point  $M(t_0)$  et a pour vecteur directeur

$$\frac{\overrightarrow{dM}}{dt}(t_0) = (1, f'(t_0)).$$

On retrouve bien que  $f'(t_0)$  en est le coefficient directeur.

☞ Une courbe paramétrée peut avoir une tangente verticale, contrairement à ce à quoi on est habitué pour des graphes de fonctions d'équation  $y = f(x)$ .

### Exercice 3.3.

Trouver les points où la tangente à la courbe de Lissajous, paramétrée par

$$\begin{cases} x(t) = \sin(2t) \\ y(t) = \sin(3t) \end{cases}, t \in [-\pi, \pi]$$

est verticale, puis horizontale.

### Remarque 3.1.

Si on écrit la formule de Taylor-Young (ou le développement limité), à l'ordre 1, en  $t_0$ , pour le paramétrage  $M$  d'une courbe  $\gamma$ , on a

$$M(t) = M(t_0) + \frac{d\vec{M}}{dt}(t_0)(t - t_0) + o(t - t_0).$$

Notamment, la *partie principale* correspond au paramétrage de la tangente à  $\gamma$  en  $M(t_0)$ .

### Remarque 3.2.

La notion de tangente en un point multiple n'a pas toujours de sens, car il peut y avoir différentes tangentes en un tel point, chacune étant associée à une valeur différente du paramètre en lequel le point est atteint.

Il faudra donc, le cas échéant, toujours préciser en quelle valeur du paramètre on calcule la tangente.

## 1.4 Étude locale aux points singuliers

Considérons un point singulier  $M(t_0)$  (c'est à dire que  $\frac{d\vec{M}}{dt}(t_0) = \vec{0}$ ).

Comme le vecteur dérivée est nul, il n'est d'aucune utilité pour la recherche d'une tangente ; il paraît naturel de chercher à préciser les termes suivants dans le développement limité de  $M$ . Notons alors

$$p = \min \left\{ k : \frac{d^k \vec{M}}{dt^k}(t_0) \neq \vec{0} \right\}.$$

On peut alors écrire, pour  $t$  au voisinage de  $t_0$ ,

$$M(t) = M(t_0) + \frac{d^p \vec{M}}{dt^p}(t_0) \frac{(t - t_0)^p}{p!} + o((t - t_0)^p)$$

et, dans ce cas, la courbe paramétrée  $t \mapsto M(t_0) + \frac{d^p \vec{M}}{dt^p}(t_0) \frac{(t - t_0)^p}{p!}$  est la (demi-)tangente à  $\gamma$  en  $M(t_0)$ .

En effet, si  $p$  est pair, il s'agit d'une demi-droite et parler de tangente est donc ambigu (on parlera plutôt de *rebroussement*). Il nous faut alors une seconde direction pour préciser ce qui se passe. Le résultat est alors le suivant.

### Proposition 3.2.

Soient  $n \geq 2$  un entier,  $M : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  un paramétrage de classe  $\mathcal{C}^n$  d'une courbe  $\gamma$  et  $t_0 \in I$ .

On suppose qu'il existe deux entiers  $(p, q) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$  tels que

$$p = \min \left\{ k \geq 2 : \frac{d^k \vec{M}}{dt^k}(t_0) \neq \vec{0} \right\}, \quad q = \min \left\{ k > p : \left( \frac{d^p \vec{M}}{dt^p}(t_0), \frac{d^k \vec{M}}{dt^k}(t_0) \right) \text{ est libre} \right\}.$$

Alors, on a les cas de figure suivants (illustrés ci-après) :

- i. Si  $p$  est impair et que  $q$  est pair, on a un **point d'allure ordinaire**;
- ii. Si  $p$  est impair et que  $q$  est impair, on a un **point d'inflexion**;
- iii. Si  $p$  est pair et que  $q$  est impair, on a un **point de rebroussement de première espèce**;
- iv. Si  $p$  est pair et que  $q$  est pair, on a un **point de rebroussement de seconde espèce**.

*Preuve.* La démonstration repose sur le développement limité obtenu ci-avant ; pour  $t$  au voisinage de  $t_0$ ,

$$M(t) = M(t_0) + \frac{d^p \vec{M}}{dt^p}(t_0) \frac{(t - t_0)^p}{p!} + \dots + \frac{d^q \vec{M}}{dt^q}(t_0) \frac{(t - t_0)^q}{q!} + (t - t_0)^q \vec{\varepsilon}(t - t_0),$$

où  $\vec{\varepsilon}$  est une fonction à valeurs dans  $\mathbb{R}^2$ , continue au voisinage de  $t_0$  telle que  $\lim_{h \rightarrow 0} \|\varepsilon(h)\| = 0$ .

Pour alléger les notations, notons

$$\vec{v} = \frac{\overrightarrow{d^p M}}{dt^p}(t_0), \quad \vec{w} = \frac{\overrightarrow{d^q M}}{dt^q}(t_0).$$

Observons que si l'on note  $P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  la matrice de passage de la base canonique  $(e_1, e_2)$  de  $\mathbb{R}^2$  vers la base  $(\vec{v}, \vec{w})$ , alors, les coordonnées de  $\varepsilon(t - t_0)$  dans cette nouvelle base tendent encore vers 0 lorsque  $t \rightarrow t_0$  :

$$\|P^{-1}\varepsilon(h)\| \leq \|P\|_2 \|\varepsilon(h)\| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

Notons alors  $(X(t), Y(t))$  les coordonnées de  $M(t)$  dans le repère  $\mathcal{R}' = (M(t_0), \vec{v}, \vec{w})$ .

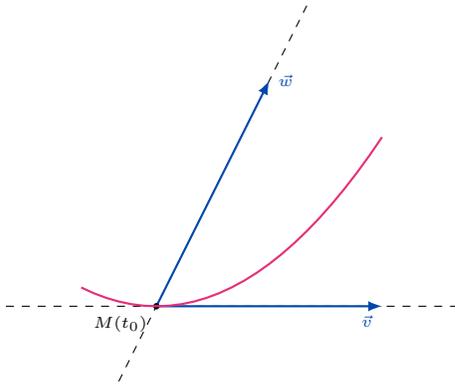
On a donc immédiatement, d'une part,

$$Y(t) = \frac{(t - t_0)^q}{q!} + o((t - t_0)^q).$$

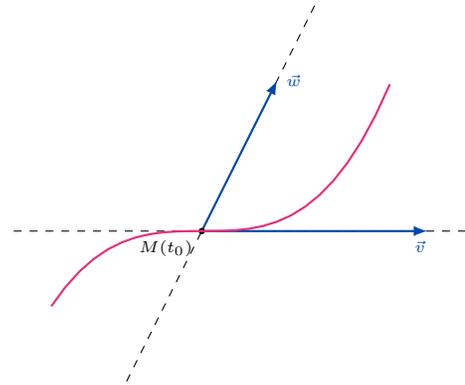
Comme, pour tout  $k \in \llbracket p, q - 1 \rrbracket$ ,  $\frac{\overrightarrow{d^k M}}{dt^k}(t_0)$  est colinéaire à  $\frac{\overrightarrow{d^p M}}{dt^p}(t_0)$  et que, pour  $k \geq p$ ,  $(t - t_0)^k = o((t - t_0)^p)$  (lorsque  $t \rightarrow t_0$ ), on a aussi

$$X(t) = \frac{(t - t_0)^p}{p!} + o((t - t_0)^p).$$

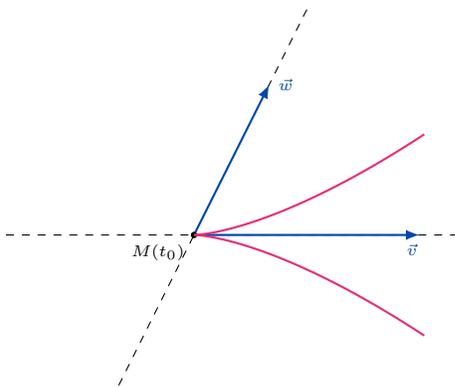
En  $M(t_0)$ ,  $\gamma$  admet alors une tangente de vecteur directeur  $\vec{v} = \frac{\overrightarrow{d^p M}}{dt^p}(t_0)$ . La position de la courbe par rapport à cette tangente est donnée par les parités de  $p$  et  $q$ , ce qu'on représente avec les figures ci-dessous. On a un des quatre cas de figure suivants :



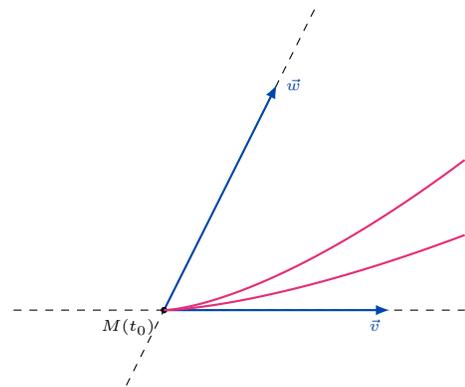
i.  $p$  impair,  $q$  pair  
point d'allure normale



ii.  $p$  impair,  $q$  impair  
point d'inflexion



iii.  $p$  pair,  $q$  impair  
point de rebroussement de première espèce



iv.  $p$  pair,  $q$  pair  
point de rebroussement de seconde espèce

**Remarque 3.3.**

- ✗ Tout point birégulier est un point d'allure normale (car on a dans ce cas  $p = 1, q = 2$ ).
- ✗ Un point d'inflexion est un point où la courbe traverse sa tangente.  
Si la courbe est régulière (*i.e.* pas de point singulier), les points d'inflexion sont à chercher parmi ceux pour lesquels

$$\frac{\overrightarrow{d^p M}}{dt^p}(t_0), \quad \text{et} \quad w = \frac{\overrightarrow{d^q M}}{dt^q}(t_0)$$

sont colinéaires.

- ✗ Un point de rebroussement est un point où les demi-tangentes à droite et à gauche sont une même demi-droite. Il s'agit toujours d'un point singulier. Mais un point singulier n'est pas toujours un point de rebroussement !
- ✗ Lorsque cela permet un calcul plus simple, on peut écrire le développement limité de  $M(t)$  pour lire immédiatement les valeurs de  $p$  et  $q$ .
- ✗ Si la limite

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{y(t) - y(t_0)}{x(t) - x(t_0)} \left( = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{y'(t)}{x'(t)} \right) = \ell$$

existe et est finie, alors  $\ell$  est le coefficient directeur de la tangente à  $\gamma$  en  $M(t_0)$ . Si la limite précédente existe et est infinie, la tangente est verticale.

**Exercice 3.4.**

Étudier le point singulier à l'origine de chacune des courbes ci-dessous :

1.  $\gamma_1$  paramétrée par  $\begin{cases} x(t) = t^2 \\ y(t) = t^5 \end{cases}$ .
2.  $\gamma_2$  paramétrée par  $\begin{cases} x(t) = t^5 \\ y(t) = t^3 \end{cases}$ .
3.  $\gamma_3$  paramétrée par  $\begin{cases} x(t) = t^2 \ln(1+t) \\ y(t) = t^2 (\exp(t^2) - 1) \end{cases}$ .

**Exercice 3.5.**

Déterminer et étudier les points singuliers de la courbe  $\gamma$  paramétrée par  $\begin{cases} x(t) = t^2 - t^3 \\ y(t) = t^2 + t^3 \end{cases}$ .

**1.5 Branches infinies****Définition 3.5.****Branches infinies**

Soient  $M : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  un paramétrage d'une courbe  $\gamma$  et  $t_0 \in \bar{I}$ . On note  $x, y : I \rightarrow \mathbb{R}$  les fonctions coordonnées de  $M$ . On dit que  $M$  a une **branche infinie** en  $t_0$  lorsque

$$\lim_{t \rightarrow t_0} M(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} \|\overrightarrow{OM(t)}\| = \lim_{t \rightarrow t_0} \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2} = +\infty$$

ce qui revient au même de dire qu'au moins l'une des fonction  $t \mapsto |x(t)|$  ou  $t \mapsto |y(t)|$  tend vers l'infini lorsque  $t \rightarrow t_0$ .

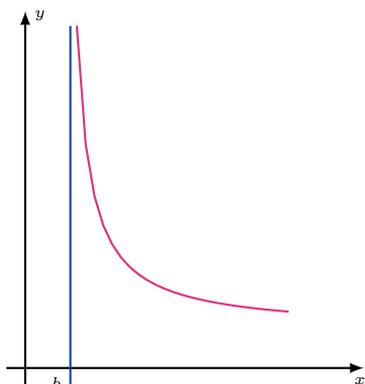
Pour chaque branche infinie, on cherche s'il existe une asymptote, c'est à dire une droite que va venir épouser la courbe, c'est à dire avec laquelle la distance tend vers 0 lorsque  $t \rightarrow t_0$ . Plus précisément, on a la définition suivante.

**Définition 3.6.****Asymptote**

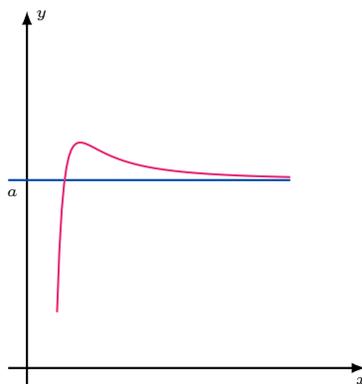
Soient  $t_0 \in \bar{I}$ ,  $M : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  un paramétrage d'une courbe  $\gamma$  admettant une branche infinie en  $t_0$ . On dit que la droite  $\mathcal{D}$  est **asymptote** à la courbe  $\gamma$  en  $t_0$  si

$$\lim_{t \rightarrow t_0} d(M(t), \mathcal{D}) = 0.$$

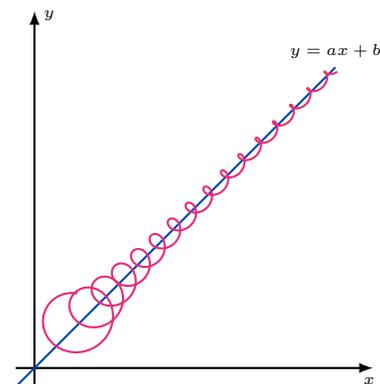
Une asymptote peut être verticale, horizontale ou oblique, comme on peut le voir avec les illustrations ci-dessous.



Asymptote verticale :  
 $x(t) \xrightarrow{t \rightarrow t_0} b^+$  et  $y(t) \xrightarrow{t \rightarrow t_0} +\infty$ .

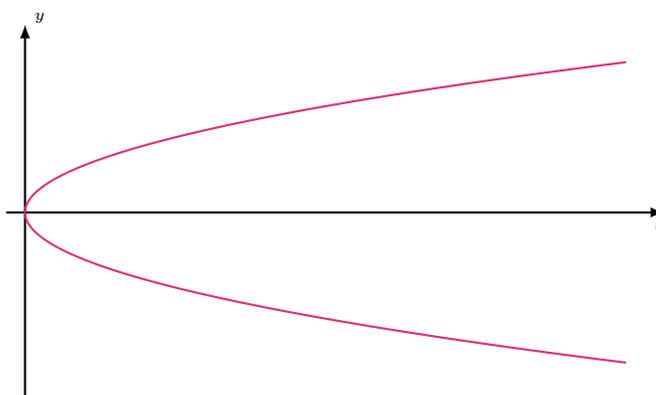


Asymptote horizontale :  
 $x(t) \xrightarrow{t \rightarrow t_0} +\infty$  et  $y(t) \xrightarrow{t \rightarrow t_0} a^+$ .



Asymptote oblique :  
 $[y(t) - (ax(t) + b)] \xrightarrow{t \rightarrow t_0} 0$ .

⚠ **Attention**, une branche infinie peut ne pas admettre de droite asymptote (comme dans le cas d'une parabole), on parle alors *branche parabolique* de direction une certaine droite.



Branches paraboliques de direction horizontale :  
 $y(t) = o(x(t)), t \rightarrow \pm\infty$ .

⚠ **Pour déterminer la nature de la branche infinie**, en  $t_0$ ; on forme le quotient  $\frac{y(t)}{x(t)}$ :

- ✗ Si  $\frac{y(t)}{x(t)} \xrightarrow{t \rightarrow t_0} \pm\infty$ , on dira que  $\gamma$  admet une branche parabolique de direction (verticale)  $(Oy)$ .
- ✗ Si  $\frac{y(t)}{x(t)} \xrightarrow{t \rightarrow t_0} 0$ , on dira que  $\gamma$  admet une branche parabolique de direction (horizontale)  $(Ox)$ .
- ✗ Si  $\frac{y(t)}{x(t)} \xrightarrow{t \rightarrow t_0} a \in \mathbb{R}^*$ , et que  $y(t) - ax(t) \xrightarrow{t \rightarrow t_0} b \in \mathbb{R}$ , on dira que  $\gamma$  admet une asymptote d'équation  $y = ax + b$ . Dans ce cas, il est nécessaire d'étudier le signe de  $y(t) - (ax(t) + b)$  lorsque  $t \rightarrow t_0$  pour connaître la position relative de la courbe par rapport à son asymptote.
- ✗ Si  $\frac{y(t)}{x(t)} \xrightarrow{t \rightarrow t_0} a \in \mathbb{R}^*$ , et que  $y(t) - ax(t) \xrightarrow{t \rightarrow t_0} \pm\infty$ , on dira que  $\gamma$  admet une branche parabolique de direction la droite d'équation  $y = ax$ .

### Exercice 3.6.

Étudier la branche infinie de la courbe  $\gamma$  paramétrée par

$$\begin{cases} x(t) = \frac{t^3 + 1}{t^2 + 1} \\ y(t) = \frac{t^3 + t^2}{t^2 + 1} \end{cases} \text{ lorsque } t \rightarrow +\infty.$$

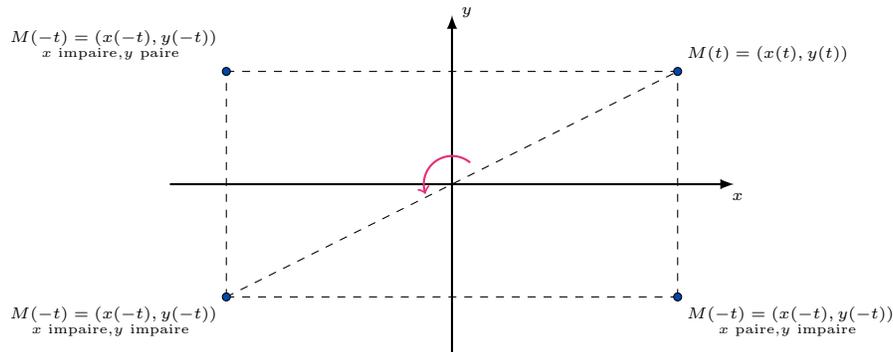
## 1.6 Réduction du domaine d'étude

Considérons une courbe  $\gamma$  paramétrée par  $M : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  dont les fonctions coordonnées sont notées  $x$  et  $y$ .

Il est clair que si  $x$  et  $y$  sont toutes deux des fonctions  $T$ -**périodiques** définies sur  $I = \mathbb{R}$ , il suffit d'étudier  $x$  et  $y$  sur  $[0, T]$  (ou tout autre intervalle d'amplitude  $T$ ) puis de tracer la courbe paramétrée par

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad t \in [0; T].$$

D'autres observations et transformations géométriques permettent de réduire le domaine d'étude et d'obtenir  $\gamma$  à partir de l'arc paramétré réduit auquel on fait subir les transformations géométriques susmentionnées.



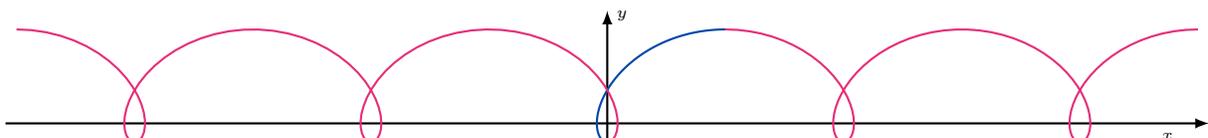
- ✗ Si  $x$  et  $y$  sont toutes les deux paires, on restreint le domaine d'étude à  $I \cap \mathbb{R}_+$ . La courbe ainsi tracée est complète.
- ✗ Si  $x$  et  $y$  sont toutes les deux impaires, on restreint le domaine d'étude à  $I \cap \mathbb{R}_+$ . On complète ensuite la courbe ainsi tracée par symétrie de centre  $O$ .
- ✗  $x$  est paire et  $y$  est impaire, on restreint le domaine d'étude à  $I \cap \mathbb{R}_+$ . On complète ensuite la courbe ainsi tracée par symétrie d'axe  $(Ox)$ .
- ✗  $x$  est impaire et  $y$  est paire, on restreint le domaine d'étude à  $I \cap \mathbb{R}_+$ . On complète ensuite la courbe ainsi tracée par symétrie d'axe  $(Oy)$ .
- ✗ Si le changement de  $t$  en  $a + b - t$  fait apparaître une transformation géométrique permettant de passer de  $M(t)$  à  $M(a + b - t)$ , on restreint le domaine d'étude de  $I = [a, b]$  à  $[a, \frac{a+b}{2}]$ , et on complète ensuite la courbe en appliquant cette transformation.
- ✗ Si le changement de  $t$  en  $1/t$  fait apparaître une transformation géométrique permettant de passer de  $M(t)$  à  $M(1/t)$ , on restreint le domaine d'étude de  $I = ]0, +\infty[$  à  $]0, 1[$ , et on complète ensuite la courbe en appliquant cette transformation.
- ✗ Si, pour tout  $t \in I = \mathbb{R}$ ,  $M(t + T) = M(t) + \vec{u}$ , on restreint de domaine d'étude à  $[0, T]$  et on complète la courbe par translations de vecteurs  $k \cdot \vec{u}$ , pour  $k \in \mathbb{Z}$ .

### Exercice 3.7.

Déterminer un domaine d'étude le plus simple possible de la courbe  $\gamma$  paramétrée par

$$\begin{cases} x(t) = t - \frac{3}{2} \sin(t) \\ y(t) = 1 - \frac{3}{2} \cos(t) \end{cases}.$$

On pourra ensuite expliquer la construction de la courbe sur la figure ci-dessous.



## 1.7 Plan d'étude d'une courbe paramétrée

Pour étudier une courbe paramétrée, en général, on suit le plan d'étude suivant :

1. On détermine l'ensemble de définition puis le domaine d'étude le plus simple possible.
2. On étudie les fonctions coordonnées  $x$  et  $y$ , on trace le tableau de variations à 5 lignes :

$t$	
$x'(t)$	
$x$	
$y$	
$y'(t)$	

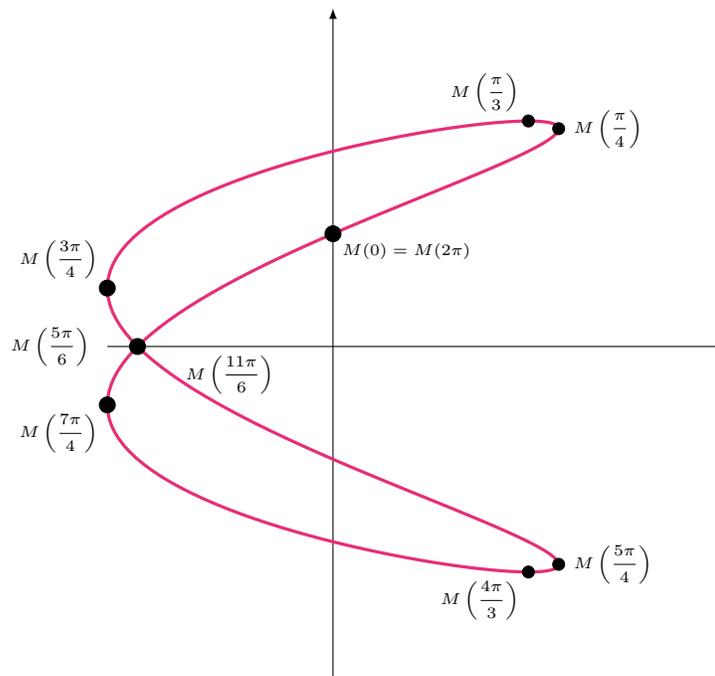
3. On étudie les éventuels points singuliers.
4. On étudie les éventuelles branches infinies et les tangentes aux points qui apparaissent dans le tableau de variations.
5. Réalisation d'un brouillon du tracé. Pour cela :
  - ✗ Si  $x$  croît et  $y$  croît, on va vers la droite et vers le haut.
  - ✗ Si  $x$  croît et  $y$  décroît, on va vers la droite et vers le bas.
  - ✗ Si  $x$  décroît et  $y$  croît, on va vers la gauche et vers le haut.
  - ✗ Si  $x$  décroît et  $y$  décroît, on va vers la gauche et vers le bas.

Le brouillon du tracé permet notamment de faire apparaître d'éventuels points multiples, dont on vérifiera l'existence par le calcul.

6. Construction méticuleuse de la courbe, asymptotes et tangentes, en utilisant éventuellement les transformations géométriques qui auraient pu permettre de réduire le domaine d'étude.

### Exercice 3.8.

Dresser les tableaux de variations (sur  $[0, 2\pi]$ ) des fonctions coordonnées de la courbe paramétrée représentée ci dessous



### 1.8 Un exemple d'étude complète : le folium de Descartes

On étudie dans cette dernière question la courbe  $\gamma$  paramétrée par

$$\begin{cases} x(t) = \frac{3t}{1+t^3} \\ y(t) = \frac{3t^2}{1+t^3} \end{cases}$$

1. Les fonctions coordonnées sont toutes deux définies sur  $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ .

Pour  $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ , on a

$$x\left(\frac{1}{t}\right) = y(t), \quad y\left(\frac{1}{t}\right) = x(t).$$

Comme l'application  $t \mapsto \frac{1}{t}$  est bijective de  $]-1, 0[$  sur  $] -\infty, -1]$  et de  $]0, 1]$  sur  $[1, +\infty[$ , la restriction de l'étude à l'intervalle  $[-1, 1]$  permet d'avoir une courbe complète en terminant le tracé par symétrie par rapport à la première bissectrice d'équation  $y = x$ .

2. On a, pour tout  $t \in ]-1, 1]$ ,

$$x'(t) = \frac{3(1-2t^3)}{(1+t^3)^2}, \quad y'(t) = \frac{3t(2-t^3)}{(1+t^3)^2},$$

ce qui donne sans difficulté le tableau de variations ci-dessous :

$t$	-1	0	$\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$	1
$x'(t)$		+	0	-
$x$	$-\infty$	0	$\sqrt[3]{4}$	$3/2$
$y$	$+\infty$	0	$\sqrt[3]{2}$	$3/2$
$y'(t)$		-	0	+

3. Il n'y a pas de point singulier.

4. **Branches infinies et tangentes.**

Lorsque  $t$  tend vers  $-1$ , on a  $x(t) \xrightarrow[t \rightarrow -1]{} -\infty$ ,  $y(t) \xrightarrow[t \rightarrow -1]{} +\infty$ .

On a donc une branche infinie en  $-1$  (et on remarque que c'est la seule). Comme  $\lim_{t \rightarrow -1} \frac{y(t)}{x(t)} = -1$ , puis que

$$y(t) - (-x(t)) = \frac{3t}{t^2 - t + 1} \xrightarrow[t \rightarrow -1]{} -1,$$

la droite  $\mathcal{D}$  d'équation  $y = -x - 1$  est asymptote oblique à la courbe. On peut même préciser que,

$$y(t) - (-x(t) - 1) = \frac{(t+1)^2}{t^2 - t + 1} > 0,$$

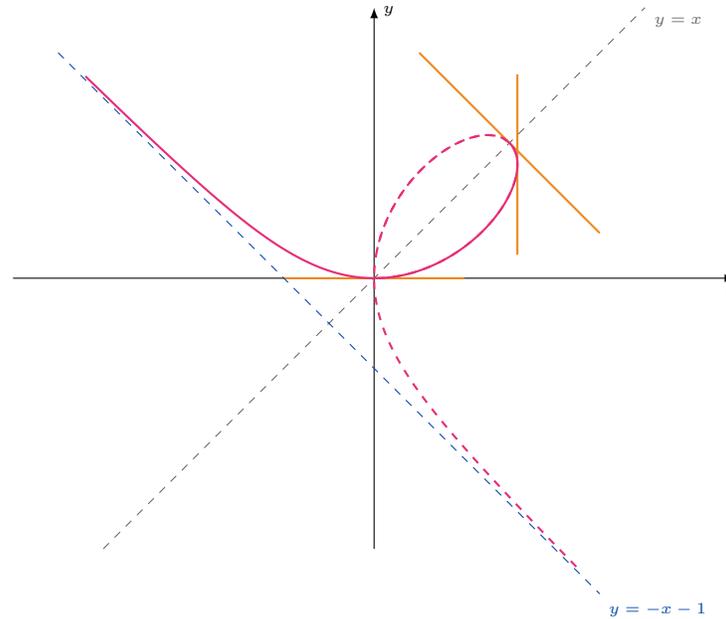
donc  $\gamma$  est au dessus de son asymptote.

En  $M(0)$ , la tangente à  $\gamma$  a pour coefficient directeur  $\frac{y'(0)}{x'(0)} = 0$  et on a une tangente horizontale.

En  $M\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right)$ ,  $\frac{y'(t)}{x'(t)} \xrightarrow[t \rightarrow \sqrt[3]{\frac{1}{2}}]{} \infty$ , on a donc une tangente verticale au point  $M\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right) = (\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{2})$ .

En  $M(1)$ , la tangente à  $\gamma$  a pour coefficient directeur  $\frac{y'(1)}{x'(1)} = -1$ .

5. On peut tracer la courbe. On s'aide de l'asymptote et des tangentes. Puis on complète par symétrie par rapport à la première bissectrice d'équation  $y = x$ .



### Exercice 3.9.

On cherche à représenter la courbe  $\gamma$  paramétrée par  $M : t \mapsto \begin{cases} x(t) = \tan\left(\frac{t}{3}\right) \\ y(t) = \sin(t) \end{cases}$ .

- Déterminer le domaine de définition  $D$  de  $M$ .
  - Calculer, pour  $t \in D$ ,  $M(t + 6\pi)$ . En déduire qu'on peut réduire le domaine d'étude à un domaine  $D'$  centré en 0 qu'on explicitera.
  - Calculer, pour  $t \in D'$ ,  $M(-t)$ . En déduire qu'on peut réduire le domaine d'étude à un ensemble  $D''$  deux fois plus petit que le précédent.
  - Calculer alors, pour  $t \in D''$ ,  $M(3\pi - t)$  et en déduire un domaine d'étude le plus simple possible.
- Dresser le tableau de variations des fonctions coordonnées  $x$  et  $y$  sur ce domaine.
- Vérifier qu'il n'y a pas de point singulier.
- Montrer qu'il n'y a sur ce domaine qu'une seule branche infinie et préciser sa nature.
- Déterminer les points éventuels où la tangente à la courbe est horizontale, ainsi que l'équation de la tangente au point  $M(0)$ .
- Tracer soigneusement la courbe complète.

### Exercice 3.10.

Étudier et tracer la courbe  $\gamma$  paramétrée par  $\begin{cases} x(t) = \cos^3(t) \\ y(t) = \sin^3(t) \end{cases}$ .

## 2 Enveloppe d'une famille de droites

### Définition 3.7.

On appelle *famille de droites* (du plan) toute famille de droites  $(\mathcal{D}_t)_{t \in I}$ , où  $I$  est un intervalle (non trivial), de sorte que  $\mathcal{D}_t$  soit paramétrée par

$$(\mathcal{D}_t) : A(t) + \lambda \vec{u}(t), \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

avec  $A$  et  $\vec{u}$  des fonctions vectorielles de classe  $\mathcal{C}^1$  définies sur  $I$ .

### Famille de droites

**Exemple 3.8.**

Le cercle trigonométrique est paramétré par  $M(t) \begin{cases} x = \cos(t) \\ y = \sin(t) \end{cases}$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ .

Pour tout  $t \in [0; 2\pi]$ , la tangente au point  $M(t)$  est la droite

$$(\mathcal{D}_t) : M(t) + \lambda \frac{\overrightarrow{dM}}{t}(t), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Comme  $M$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , il s'agit bien d'une famille de droites (avec la définition ci-dessus), en l'occurrence de la famille de droites de paramétrisation

$$\forall t \in [0, 2\pi], \quad (\mathcal{D}_t) : \begin{cases} x = \cos(t) - \lambda \sin(t) \\ y = \sin(t) + \lambda \cos(t) \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Plus généralement, on peut, pour toute courbe paramétrée  $\gamma$  régulière de classe  $\mathcal{C}^1$  définir la famille de ses tangentes, paramétrée par

$$(\mathcal{D}_t) : M(t) + \lambda \frac{\overrightarrow{dM}}{t}(t), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

On peut alors se poser la question de la réciproque du procédé ; étant donnée une famille de droite

$$(\mathcal{D}_t)_{t \in I} : A(t) + \lambda \vec{u}(t), \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

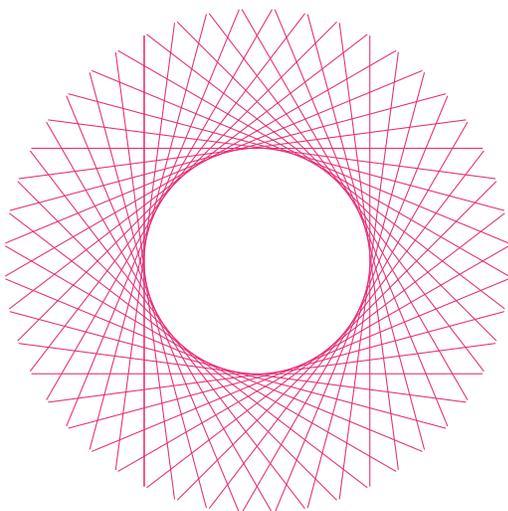
sil existe une (ou plusieurs) courbe(s) du plan dont  $(\mathcal{D}_t)_{t \in I}$  est la famille des tangentes.

**Définition 3.8.****Enveloppe**

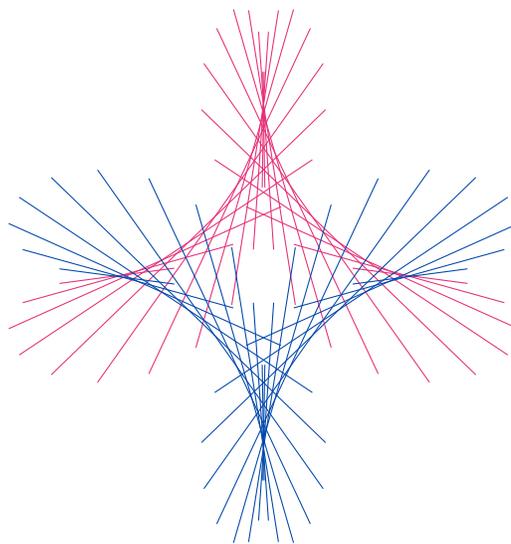
Soit  $(\mathcal{D}_t)_{t \in I}$  une famille de droites du plan. On appelle **enveloppe** de  $(\mathcal{D}_t)_{t \in I}$  toute courbe  $\gamma$  de classe  $\mathcal{C}^1$  dont  $(\mathcal{D}_t)_{t \in I}$  est exactement la famille des tangentes.

**Exemple 3.9.**

On représente ci-dessous deux enveloppes de famille de droites.



L'enveloppe de la famille des tangentes du cercle trigonométrique est le cercle trigonométrique lui-même.



L'astroïde comme enveloppe de la famille de ses tangentes

$$(\mathcal{D}_t) : \begin{pmatrix} \cos^3(t) \\ \sin^3(t) \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \sin(t) \cos^2(t) \\ 3 \cos(t) \sin^2(t) \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

La famille  $(\mathcal{D}_t) : A(t) + \lambda \vec{u}(t)$  ( $\lambda \in \mathbb{R}$ ) étant donnée, on cherche une courbe paramétrée  $\gamma$  telle que, pour tout  $t$ ,  $\mathcal{D}_t$  est tangente à  $\gamma$  et, pour tout point  $M$  de  $\gamma$ , il existe  $t$  tel que  $\mathcal{D}_t$  est la tangente à  $\gamma$  en  $M$ .

La seconde condition implique alors que, pour tout  $t$ , il existe  $\lambda = \lambda(t)$  tel que  $A(t) + \lambda(t) \vec{u}(t)$  est un point de  $\gamma$ . On cherche donc un paramétrage de  $\gamma$  sous cette forme.

On veut de plus que  $\mathcal{D}_t$  soit la tangente à  $\gamma$  en  $M(t) = A(t) + \lambda(t)\vec{u}(t)$  c'est à dire que  $\frac{d\vec{M}}{dt}(t)$  et  $\vec{u}(t)$  soient colinéaires, ce qui se traduit par

$$\det\left(\frac{d\vec{M}}{dt}(t), \vec{u}(t)\right) = 0.$$

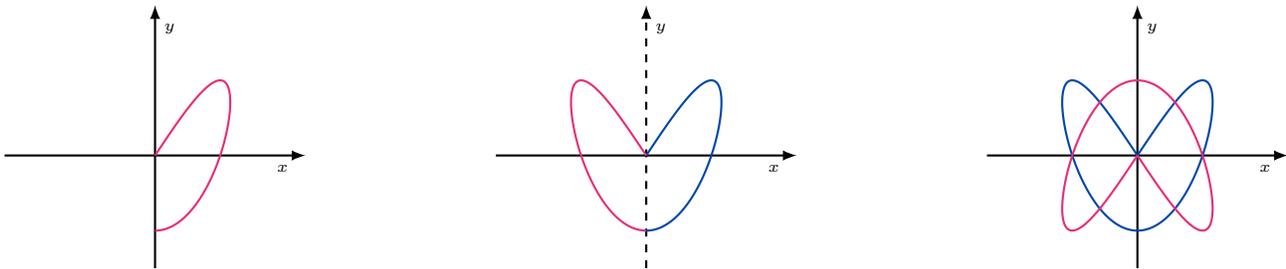
### Exercice 3.11.

Montrer que l'enveloppe de la famille des tangentes du cercle trigonométrique est le cercle trigonométrique lui-même.

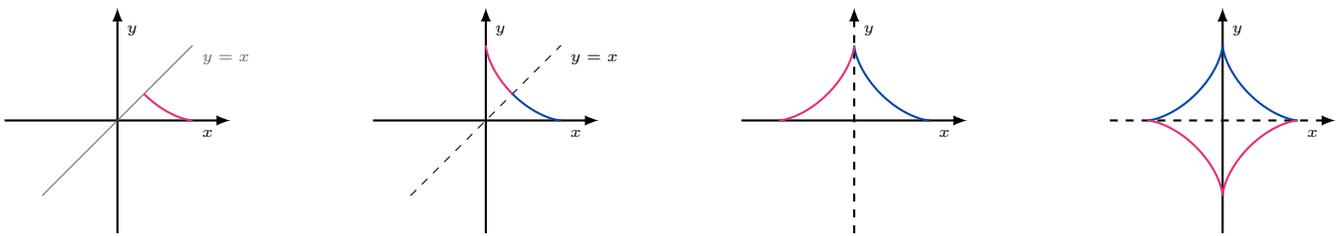
## 2.1 Quelques tracés

On propose les constructions très sommaires de quelques courbes paramétrées classiques pour illustrer et clore ce chapitre.

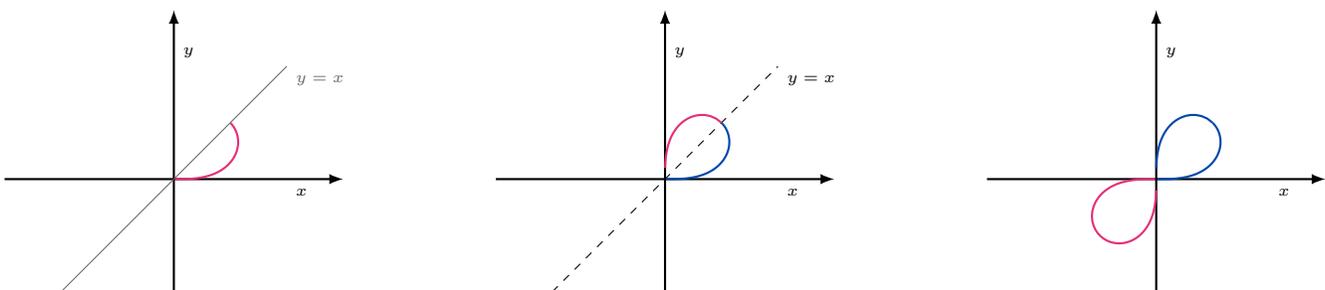
✕ Courbe de Lissajous  $\gamma : t \mapsto (\sin(2t), \sin(3t))$ .



✕ Astroïde  $\gamma : t \mapsto (\cos^3(t), \sin^3(t))$ .



✕ Lemniscate de Bernoulli :  $\gamma : t \mapsto \left(\frac{t}{1+t^4}, \frac{t^3}{1+t^4}\right)$ .



✕ Cardioïde :  $\gamma \mapsto (2 \cos(t) - \cos(2t), 2 \sin(t) - \sin(2t))$ .



### 3 Autres exercices

#### 3.1 Recherche de points multiples

##### Exercice 3.12.

Montrer que la courbe suivante admet un unique point double  $M$ , et calculer ses coordonnées:

$$\begin{cases} x(t) = t + 1 + \frac{1}{t-1} \\ y(t) = t^2 + 1 + \frac{1}{t} \end{cases}, t \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}.$$

#### 3.2 Nature de points singuliers

##### Exercice 3.13.

Discuter selon  $k \in \mathbb{R}$  la nature du point  $M(0)$  de l'arc  $(\Gamma)$  paramétré par  $\begin{cases} x(t) = \cos(t) + \frac{kt^3}{6} \\ y(t) = t - \operatorname{sh}(t) + \frac{t^2}{2} \end{cases}$ .

##### Exercice 3.14.

Étudier le point singulier en  $(1, 0)$  de la courbe paramétré par  $\begin{cases} x(t) = 1 + t^2 + \frac{1}{2}t^3 \\ y(t) = t^2 + \frac{1}{2}t^3 + 2t^4 \end{cases}$ .

On précisera donc la nature du point et on donnera un vecteur tangent. Enfin, on dessinera l'allure locale de la courbe en ce point singulier.

#### 3.3 Études et tracés

##### Exercice 3.15.

Oral Mines-Télécom 2025

Déterminer la nature d'éventuelles branches infinies pour donner l'allure de la courbe paramétrée par

$$\begin{cases} X(t) = \frac{4t-5}{t^2-1} \\ Y(t) = \frac{1}{t-1} \end{cases}$$

##### Exercice 3.16.

Poisson d'Avril

Étudier et tracer la courbe paramétrée par  $\begin{cases} x(t) = \cos(2t) - 2\sqrt{2} \cos(t) \\ y(t) = \sin(2t) \end{cases}$ .

##### Exercice 3.17.

Oral Math II 2025

1. Montrer que l'équation  $4x^3 + x^2 - 1 = 0$  possède une seule solution réelle  $a$  et que l'on a :  $1/2 < a < 2/3$ .  
Dans la suite, on prendra  $a \approx 0,56$ .

2. Étudier et tracer la courbe paramétrée définie par :  $\begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin t + \sqrt{|\cos t|} \end{cases}$ .  
On justifiera la réduction de l'intervalle d'étude.

##### Exercice 3.18.

Étudier et tracer la courbe paramétrée par  $\begin{cases} x(t) = -\frac{1}{t} + \ln|t| \\ y(t) = t + \ln|t| \end{cases}$ .

**Exercice 3.19.**

Étudier et tracer la courbe paramétrée par  $\begin{cases} x(t) = \exp(t) \\ y(t) = t^2 \end{cases}$ .

On étudiera précisément les points d'inflexion (tangente et positions relatives) de la courbe.

**Exercice 3.20.****Oral Math I 2019**

1. Étude et tracé de la courbe paramétrée par  $\begin{cases} x = \sin t \\ y = \sin t \cos t \end{cases}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , dans un repère orthonormé du plan.  
On étudiera en particulier avec soin les éventuelles symétries.

2. Calculer l'aire du domaine plan borné par la courbe.

**3.4 Autres constructions et lieux géométriques****Exercice 3.21.****La courbe d'Agnesi**

Soit  $A$  le point de coordonnées  $(0, 2)$  et  $\mathcal{C}$  le cercle de diamètre  $[OA]$ . Étant donné un point  $P(x_P, y_P)$  de l'axe des abscisses, on appelle  $K(x_K, y_K)$  le point d'intersection de la droite  $(AP)$  et du cercle  $\mathcal{C}$ , et  $M$  le point de coordonnées  $(x_P, y_K)$ .

1. Exprimer les coordonnées de  $M$  en fonction du coefficient directeur  $m$  de la droite  $(AP)$ .
2. Quelle est la courbe parcourue par  $M$  lorsque  $P$  parcourt l'axe des abscisses privé de  $O$ ?

**Exercice 3.22.****Oral Math II 2018**

Dans le plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , on note  $\mathcal{C}$  le cercle de centre  $O$  et de rayon 2,  $A$  et  $A'$  les points de coordonnées respectives  $(-1, 0)$  et  $(1, 0)$ , et  $M$  un point de  $\mathcal{C}$ .

1. Déterminer les coordonnées du point  $H$ , orthocentre du triangle  $AMA'$ .
2. Étudier le lieu de  $H$  lorsque  $M$  parcourt le cercle  $\mathcal{C}$ .

**3.5 Enveloppe d'une famille de droites****Exercice 3.23.**

Déterminer l'enveloppe de la famille de droites  $(\mathcal{D}_t)_{t \in \mathbb{R}}$  où  $(\mathcal{D}_t)$  est définie par l'équation :  $t^3(x - 1) + 3tx - 2y = 0$ .

**Exercice 3.24.**

On se place dans un repère orthonormé. À tout point  $M$  de la droite d'équation  $x + y = 1$ , on associe ses projetés orthogonaux  $P$  et  $Q$  respectivement sur  $(Ox)$  et  $(Oy)$ .

1. Montrer que l'enveloppe  $\gamma$  des droites  $(PQ)$  peut être paramétrée par  $\begin{cases} x = t^2 \\ y = (t - 1)^2 \end{cases}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .
2. Montrer que  $\gamma$  est symétrique par rapport à la première bissectrice des axes.
3. Tracer  $\gamma$ . Commenter.

**Exercice 3.25.**

Déterminer l'enveloppe  $\gamma$  de la famille de droites  $(\mathcal{D}_t)$  avec  $t \in ]0, 2\pi[$  où  $\mathcal{D}_t$  est la droite passant par les points

$$A(t) = (\cos(t), \sin(t)) \quad \text{et} \quad B(t) = (\cos(2t), \sin(2t)).$$

Étudier et tracer  $\gamma$ .

**Exercice 3.26.**

Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , on considère les points  $P_t(\cos(t), 0)$  et  $Q_t(0, \sin(t))$ . Déterminer l'enveloppe de la famille des médiatrices de  $[P_tQ_t]$  pour  $t \in \mathbb{R}$ .