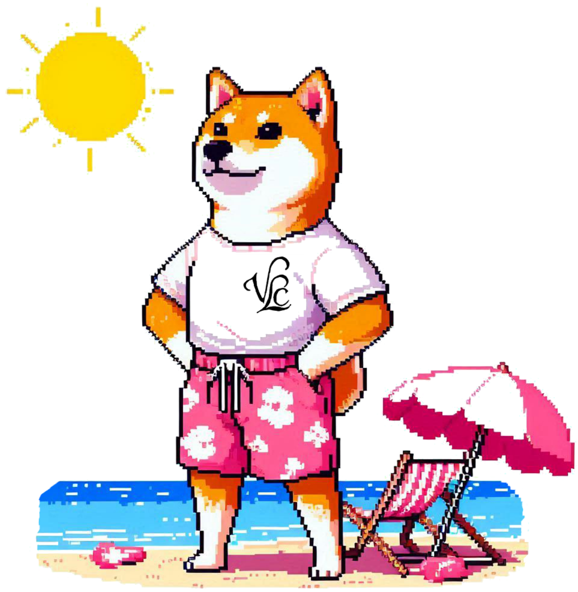
Math PTSI > PT. Été 2025

Mathématiques & Informatique - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
Lycée Voltaire, Paris 11e.

2025 Cahier de vacances



1 Une remise en route

Ce (chouette) cahier de vacances a pour but d'aider à la remise au travail après les congés d'été mérités et afin de reprendre le travail du bon pied, en évitant de courir après la montre ou d'avoir la tête sous l'eau une bonne partie de l'année scolaire de seconde année qui passe trèèèèès vite.

On a donc sélectionné quelques courtes questions ou exercices brassant une bonne partie du programme de première année, avec des difficultés variables. On n'aura pas non plus la naïveté de croire que leur maîtrise "suffit". Cela dit, il serait plus que pénalisant de débuter l'année sans que ce soit le cas.
On ne peut pas débuter l'année sans savoir résoudre parfaitement et rapidement un système par pivot de Gauss par exemple...

On a aussi inclus l'ensemble des sujets posés à l'oral le 16 Juin lors de la journée d'oraux de préparation au passage en **PT**. Une solution de ces exercices sera transmise à la rentrée.

Naturellement, il est indispensable de connaître parfaitement les différentes définitions, formules et résultats du cours.
La résolution de ce cahier peut aussi permettre de pointer ce qu'il est nécessaire de reprendre.

Il n'y aura pas de solution des questions courtes de cette planche mise en ligne. La semaine de rentrée (du 1er au 5 Septembre) sera consacrée à des révisions qui pourront piocher dans ce cahier (mais pas que), tout comme le premier programme de kholles.
À bon entendeur...

2 45 Questions courtes

Les questions de cette section sont naturellement indépendantes.

1. Résoudre les systèmes suivants

$$(i)\ \begin{cases} x+2y-z &= -3 \\ 2x-y+z &= 8 \\ 3x+y+2z &= 11 \end{cases}, \qquad (ii)\ \begin{cases} x+y-z &= 1 \\ x+2y+az &= 2 \\ 2x+ay+2z &= 3 \end{cases} \quad (a\in\mathbb{R}).$$

2. Résoudre les équations $AX=0$, $AX=X$ et $AX=3X$, d'inconnue $X\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ où, A est la matrice ci-dessous. On présentera les solutions sous forme de *sous- espace vectoriel (de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$) engendré* par une famille (finie) de vecteurs.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

3. On pose $z=\dfrac{1+\sqrt{2}+i}{1+\sqrt{2}-i}$. Calculer$|z|$. Mettre z sous forme algébrique. Calculer z^{2024}.

4. Pour chacune des deux questions (indépendantes) suivantes, proposer une résolution par le calcul puis une autre résolution géométrique.

a. Déterminer les valeurs de z pour lesquelles z, $\dfrac{1}{z}$ et $1-z$ ont même module.

b. Trouver tous les nombres complexes z vérifiant $|z|=|z-4|$ et $\arg(z)=\arg(z+1+i)$.

5. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(2k^2-1)$. On vérifiera le résultat obtenu par récurrence.

6. Calculer les sommes doubles suivantes

$$(i)\ \sum_{1\le i,j\le n}\min(i,j), \qquad (ii)\ \sum_{1\le i<j\le n}\frac{i}{j}, \qquad (iii)\ \sum_{1\le i,j\le n}\ln(i^j).$$

7. Montrer que, pour tous $n\in\mathbb{N}^*$ et $k\in[\![0;n]\!]$,

$$k\binom{n}{k}=n\binom{n-1}{k-1}.$$

8. Montrer, par la méthode de votre choix, que, pour tout $p\in\mathbb{N}^*$ et tout $n\ge p+1$, $\displaystyle\sum_{k=p}^{n-1}\binom{k-1}{p-1}=\binom{n-1}{p}$.

9. Déterminer les puissances A^n $(n\in\mathbb{N}^*)$ de la matrice

$$A=\begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\in\mathcal{M}_3(\mathbb{C}).$$

10. Calculer les valeurs suivantes

$$(i)\ \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right), \qquad (ii)\ \frac{\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}, \qquad (iii)\ \arccos\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right), \qquad (iv)\ \operatorname{ch}\left(\ln\left(\frac{2}{3}\right)\right).$$

11. Montrer que, pour tout $x>-1$, $\ln(1+x)\le x$.

12. Résoudre l'équation $1+\sin(x)-\cos(x)=0$.

13. Résoudre sur $\mathbb{R}$, puis sur l'intervalle $[0;2\pi]$, l'équation $\cos(x)+\cos(3x)=0$.

14. Soient $n\in\mathbb{N}$ et $\theta\in\mathbb{R}$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos(k\theta)$ puis $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\cos(k\theta)$ dans le cas où $\theta\not\equiv 0\ [2\pi]$.

15. Linéariser $\cos^4(x)$.

16. Déterminer les racines cubiques de $-8i$.

17. Calculer le quotient et le reste de la division euclidienne de X^4-1 par $X-1$.

18. Factoriser X^5-1 dans $\mathbb{R}[X]$.

19. Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^4+t-1}{t^2+1}\mathrm{d}t$.

20. Montrer la convergence et calculer la somme des séries ci-dessous

$$(i)\ \sum_{n\geq 0}\frac{(n+1)^2(-2)^{n+2}}{5^n},\quad (ii)\ \sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{\sqrt{n+3}}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right),\quad (iii)\ \sum_{k\geq 0}\frac{1}{2^k\times k!},$$

$$(iv)\ \sum_{k\geq 4}\frac{1}{(1-i\sqrt{2})^k},\quad (v)\ \sum_{k\geq 0}\arctan\left(\frac{(k+2)-(k+1)}{1+(k+2)(k+1)}\right).$$

21. Montrer, à l'aide de considérations géométriques, que, pour tout $x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$,

$$0<\sin(x)\leq x\leq\tan(x).$$

En déduire $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=0$ puis que la fonction cos est dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifie $\cos'=-\sin$.

22. Déterminer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de $\sin(x)+2\ln(1+x)$.
Déterminer le développement limite à l'ordre 3 en 0 de $e^{e^{ix}}$.

23. On introduit alors les suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ définies par

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\qquad u_n=\frac{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}}{n!}\quad\text{et}\quad v_n=\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right).$$

a. À l'aide de la formule de Taylor-Young à l'ordre 3 en 0, montrer que : $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{1}{12n^2}$.

b. En déduire la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}v_n$ puis celle de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ vers une limite $\ell>0$.

24. On considère, pour tout entier $n\geq 2$, la fonction h_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h_n(t)=\begin{cases} n^2t, & \text{si } 0<t\leq\frac{1}{n}\\ n^2\left(\dfrac{2}{n}-t\right), & \text{si } \frac{1}{n}<t\leq\frac{2}{n}\\ 0, & \text{si } t\notin\left]0,\frac{2}{n}\right]\end{cases}.$$

a. Représenter l'allure de la courbe de h_n. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^1 h_n(t)\mathrm{d}t$.

b. Soit $t\in[0,1]$ fixé. Que vaut $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}h_n(t)$?

c. Vérifier alors que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 h_n(t)\mathrm{d}t\neq\int_0^1\lim_{n\to+\infty}h_n(t)\mathrm{d}t.$$

25. Soit $x\in[0;1[$ fixé.
a. Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\sum_{p=1}^{n}\frac{x^p}{p}=-\ln(1-x)-\int_0^x\frac{t^n}{1-t}\mathrm{d}t.$$

b. À l'aide d'un encadrement, montrer que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^x\frac{t^n}{1-t}\mathrm{d}t=0.$$

c. Conclure que la série $\displaystyle\sum_{p\geq 1}\frac{x^p}{p}$ converge et préciser sa somme.

26. Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi}x\cos(x)e^x\mathrm{d}x$.

27. Montrer que la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = (u_n^2 + 1)/2$ est croissante, majorée par 1 et donc convergente vers une limite à préciser.

28. Déterminer les solutions des problèmes de Cauchy suivants :

$$(i) \left\{ \begin{array}{rcl} y' & = & 3y+5 \\ y(0) & = & 1 \end{array} \right. , \qquad (ii) \left\{ \begin{array}{rcl} y''-2y'+y & = & 0 \\ y(0) & = & 2 \\ y'(0) & = & 1 \end{array} \right. , \qquad (iii) \left\{ \begin{array}{rcl} y''+y'+y & = & 0 \\ y(0) & = & 1 \\ y'(0) & = & -1 \end{array} \right. .$$

29. Écrire une fonction en langage `Python`, prenant en argument un entier n, permettant de calculer le terme u_n où la suite (u_n) est définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 2, \quad \text{et} \quad u_{n+2} = \frac{7}{2}u_{n+1} - \frac{3}{2}u_n.$$

Déterminer ensuite l'expression, pour tout $n \in \mathbb{N}$, de u_n.

30. Déterminer l'ensemble des paramètres $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $\begin{pmatrix} i & 3 \\ -2i & 5i \end{pmatrix} - \lambda I_2$ ne soit pas inversible.

31. On note $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ une racine cubique de l'unité et on considère x, y, z trois réels. Calculer les déterminants :

$$(i)\ \det \begin{pmatrix} 1 & -j & j \\ j & -j^2 & 1 \\ -j^2 & 1 & j^2 \end{pmatrix}, \qquad (ii)\ \det \begin{pmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{pmatrix}, \qquad (iii)\ \det \begin{pmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x+1 & x+2 & x+3 \\ x+2 & x+3 & x+4 \end{pmatrix}$$

32. Écrire la matrice de l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ puis, après avoir justifié qu'il s'agissait bien d'une base, celle dans la base $\mathcal{F} = (-e_1, e_1 - e_2, -e_1 + e_2 + 4e_3)$, où

$$f(x, y, z) = (x + 2y - z, -y + z, 3z).$$

33. **Sans aucun calcul**, déterminer le rang de la matrice ci-dessous. En déduire, toujours sans calcul, une base de son noyau.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

34. Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ tel que $u \circ u = \mathrm{Id}$. Montrer, par analyse-synthèse, que

$$\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(u + \mathrm{Id}).$$

35. Montrer que, si C et D sont deux évènements d'un même espace probabilisé, alors

$$P(C \cup D) \leq P(C) + P(D).$$

En déduire que, si (A_j) est une suite d'évènements du même espace, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) \geq P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right).$$

36. On effectue des tirages **sans remise** d'une boule dans une urne contenant $N-1$ boules blanches et une boule noire. On note X la variable aléatoire qui prend pour valeur le rang d'apparition de la boule noire. Montrer soigneusement que $X \sim \mathcal{U}([\![1; N]\!])$.

37. Soit X une v.a. finie telle que $X(\Omega) = [\![1; n]\!]$. Montrer que

$$E(X) = \sum_{j=0}^{n-1} P(X > j).$$

38. Soit $X \sim \mathcal{B}(n, p)$. On note A l'évènement "X prend une valeur paire" et $a = P(A)$.
a. On introduit $Y = (-1)^X$. Quelle est la loi de Y? Expliciter son espérance en fonction de a.
b. Calculer, à l'aide du théorème de transfert, l'espérance de Y en fonction de n et de p. En déduire la valeur de a.

39. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dispose de n urnes. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, l'urne k contient des boules, indiscernables au toucher, numérotées de 1 à k. On choisit une urne au hasard et on pioche une boule dans cette urne.
On note X la v.a qui prend la valeur de l'urne dans laquelle et on pioche et Y celle qui prend la valeur de la boule piochée.
Déterminer la loi conjointe de (X, Y). En déduire la loi marginale de Y puis l'espérance de Y.

40. On se place dans un repère orthonormal du plan. Pour tout réel a, on définit la droite D_a d'équation

$$D_a : \ (1-a^2)x + 2ay + (a^2 - 2a - 3) = 0.$$

Déterminer tous les points par lesquels passe au moins une droite de la famille $(D_a)_{a\in\mathbb{R}}$.
Déterminer tous les points par lesquels passent deux droites perpendiculaires de la famille.

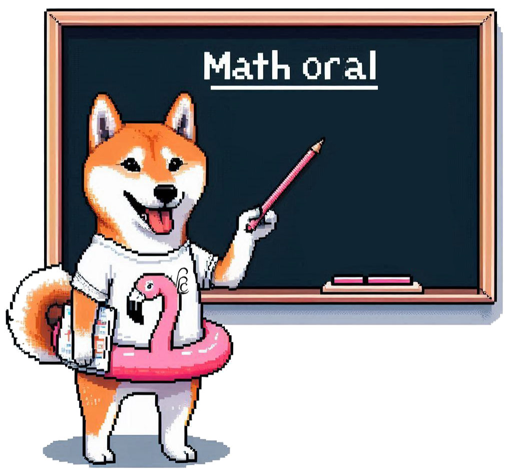
41. Soit $\mathcal{C}$ le cercle d'équation cartésienne $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 5 = 0$, et $A(4;4)$.
On peut mener par le point A deux tangentes au cercle $\mathcal{C}$.
Calculer la distance entre les points d'intersection de ces tangentes et de $\mathcal{C}$.

42. Démontrer à l'aide d'un calcul de produit scalaire que les hauteurs d'un triangle non aplati sont concourantes.

43. Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ les deux plans d'équations respectives $3x - 4y + 1 = 0$ et $2x - 3y + 6z - 1 = 0$.
Déterminer tous les points équidistants des plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$.

44. Prouver la formule du double produit vectoriel : $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u}\cdot\vec{w})\vec{v} - (\vec{u}\cdot\vec{v})\vec{w}$.
En déduire l'identité $(\vec{u}\wedge\vec{v})\wedge\vec{w} + (\vec{v}\wedge\vec{w})\wedge\vec{u} + (\vec{w}\wedge\vec{u})\wedge\vec{v} = \overrightarrow{0}$.

45. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs fixés. Déterminer tous les vecteurs $\vec{x}$ tels que $\vec{u}\wedge\vec{x} = \vec{v}$.



Exercices d'oral

Sujet n°1

On considère une suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ qu'on suppose croissante et convergente vers un réel ℓ.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $b_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$.

On veut montrer que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge également vers ℓ.

1. **a.** Établir la relation suivante : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ b_{n+1} - b_n = \dfrac{1}{n(n+1)}\left(na_{n+1} - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k\right)$.
   b. En déduire que la suite (b_n) est croissante.
   c. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n \le \ell$.
   En déduire que (b_n) converge vers un réel ℓ' qui vérifie $\ell' \le \ell$.
   d. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $2b_{2n} - b_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} a_k$.
   En déduire l'inégalité : $2b_{2n} - b_n \ge a_n$.
   e. Déduire des questions précédentes que $\ell' = \ell$ et qu'ainsi, la suite (b_n) converge vers ℓ.

2. **a.** Écrire une fonction `Python` d'en-tête `def suite_b(a):` qui prend en argument la liste `a` $= [a_1, ..., a_n]$ des $n-$ premiers termes de la suite (a_k) et renvoie les n premiers termes de la suite (b_k)
   b. Déterminer quelle valeur (approximative) va s'afficher à l'exécution des commandes suivantes :

```python
a = np.array([ 2-1/n**2 for n in range(1,1001) ])
b = suite_b(a)
print(b[999])
```

Sujet n°2

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $P_n = (X+1)^{2n} - 1$.

1. Écrire sous forme développée P_1 et P_2 et donner leur factorisation dans $\mathbb{C}[X]$.

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on peut écrire $P_n = XQ_n$, où Q_n est un polynôme dont on précisera le degré, le coefficient dominant et le terme constant.

3. Montrer que P_n n'admet que des racines simples.

4. Déterminer les racines complexes de P_n (on les mettra sous forme exponentielle).

5. Calculer $\displaystyle\prod_{k=1}^{2n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$, puis $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$.

Sujet n°3

On considère pour tout $n \in \mathbb{N}$ $J_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-nx}}{e^x+1}\mathrm{d}x$.

1. Calculer : $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}\mathrm{d}x$.
   Exprimer J_0 en fonction de I et en déduire la valeur de J_0.

2. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$: $0 \leqslant J_n \leqslant \dfrac{1}{n}$.
   En déduire la limite de la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

3. Montrer que la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
En déduire sans calcul supplémentaire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \frac{1}{2}\left(J_n + J_{n+1}\right) \leqslant J_n \leqslant \frac{1}{2}\left(J_{n-1} + J_n\right).$$

4. Calculer $J_n + J_{n+1}$ en fonction de n.
5. En déduire la limite de la suite $(nJ_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Sujet n°4

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère un vecteur v **fixé** de $\mathbb{R}^3$.
On considère également l'application f qui à tout vecteur $u = (a, b, c)$ de $\mathbb{R}^3$ associe le vecteur $f(u)$ défini par :

$$f(u) = u - (a + b + c)v.$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

2. Dans la suite, on suppose que $v = (2, -1, 0)$.

a. Calculer $f(v)$. f est-il un automorphisme ?
b. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$.
c. Montrer que $y \in \mathrm{Im}(f) \iff f(y) = y$. En déduire, sans calculs supplémentaires, une base (w, z) de $\mathrm{Im}(f)$.
d. En déduire, sans calculs supplémentaires, une base de $\mathrm{Ker}(f)$.
e. Montrer que la famille $\mathcal{C} = (v, w, z)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
f. Déterminer la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ puis dans la base $\mathcal{C}$.

Sujet n°5

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ représenté dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$ par la matrice $B = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. On note $v_1 = (2, -1)$ et $v_2 = (-1, 0)$. Montrer que (v_1, v_2) forme une base de $\mathbb{R}^2$.
2. Déterminer la matrice T de f dans cette base.
3. On note Q la matrice dont les colonnes sont les coordonnées de v_1 et v_2 dans la base canonique. Justifier que Q est inversible. Déterminer Q^{-1} et vérifier que $B = QTQ^{-1}$.

On considère le *système différentiel* (Σ) suivant

$$(\Sigma) : \left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & -x - 4y \\ y' & = & x + 3y \end{array} \right.$$

où x et y désignent des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ (à valeurs réelles).
Afin de résoudre (Σ) (c'est à dire de déterminer x et y), on pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. On a alors que $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

4. On introduit $Z = Q^{-1}X$. On admet que, par linéarité de la dérivation, $Z' = Q^{-1}X'$.
Vérifier que (x, y) est solution de (Σ) si et seulement si

$$Z' = TZ.$$

5. On note $Z = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$. Expliciter, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\alpha(t)$ et $\beta(t)$.
6. Conclure.

Sujet n°6

Soit a un entier strictement positif. On dispose d'un jeu usuel de $2n$ cartes ($n = 16$ ou 26) qui contient donc deux rois rouges (*carreau* et *coeur*).

Les cartes du jeu sont alignées sur une table de façon alétoire. Le joueur découvre les cartes, de gauche à droite jusqu'à obtenir le premier roi rouge. On note X la variable aléatoire qui prend la valeur du rang d'apparition du premier roi rouge.
1. Que vaut $X(\Omega)$?
2. Montrer que, pour tout $k \in X(\Omega)$,

$$\mathbf{P}(X = k) = \frac{2n - k}{n\,(2n - 1)}.$$

3. Montrer que $\mathbf{E}(X) = \dfrac{2n+1}{3}$.

4. Le joueur perd un euro chaque fois qu'il découvre une carte et gagne a euros lorsqu'il obtient le premier roi rouge. On note G_1 la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur. Exprimer G_1 en fonction de a et X. En déduire l'expression de $E(G_1)$ en fonction de a et n.

Les $2n$ cartes du même jeu sont toujours alignées sur une table de façon aléatoire, mais cette fois-ci, le joueur peut découvrir au maximum n cartes.
Le joueur perd un euro à chaque fois qu'il découvre une carte et gagne a euros lorsqu'il obtient le premier roi rouge.
On note G_2 la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

5. Pour tout entier $k \in [\![1;n]\!]$, déterminer $\mathbf{P}\left(G_2 = a-k\right)$.

6. Vérifier que

$$\mathbf{P}(G_2 = -n) = \frac{n-1}{2\,(2n-1)}.$$

7. Obtenir alors que

$$\mathbf{E}\left(G_2\right) = \frac{3\,(3n-1)\,a - \left(7n^2-1\right)}{6\,(2n-1)}.$$

Sujet n°7

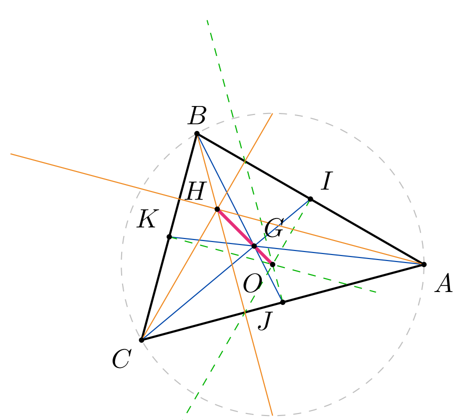
Soit D la droite passant par $A(3,2,1)$ et dirigée par $\vec{u}(1,-1,3)$ et D' la droite passant par $B(2,1,-2)$ et dirigée par $\vec{v}(-1,0,2)$. On pose $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$.

1. Les droites D et D' sont-elles coplanaires?
2. Déterminer une équation cartésienne du plan $P : (A, \vec{u}, \vec{w})$.
3. Déterminer l'intersection C de P et D'.
4. Soit Δ la droite passant par C et dirigée par $\vec{w}$.
Montrer que Δ est perpendiculaire à D et D'.

Sujet n°9

ABC est un triangle non aplati, dont le centre de son cercle circonscrit est l'origine O du repère orthonormé direct. On note a, b et c les affixes respectives de A, B et C.

Montrer que les trois médiatrices de ABC sont concourantes en O, que ses médianes sont concourantes en G d'affixe $\frac{1}{3}(a+b+c)$ et que ses hauteurs sont concourantes en H d'affixe $a+b+c$.
Montrer que O, G et H sont alignés.



Sujet n°8

On considère une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant :

$$u_0 \in \mathbb{R} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1+u_n^2}{2}$$

1. Déterminer en fonction de u_0 la limite de u_n quand $n \to +\infty$.

2. Soit u_0 tel que (u_n) converge vers ℓ.
Écrire une fonction Python d'en-tête `def rang(eps):` qui prend en argument un réel $\varepsilon > 0$ et renvoie le premier indice $n \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n - \ell| < \varepsilon$.

3. Dans cette question, on suppose que $u_0 \in]-1;1[$ et on pose pour tout entier $n \in \mathbb{N}, w_n = 1 - u_n$.

a. Écrire la relation de récurrence vérifiée par la suite $(w_n)_{n\geqslant 0}$. En déduire que la série $\sum w_n^2$ converge.

b. Déterminer la nature de la série $\sum \ln\left(\frac{w_{n+1}}{w_n}\right)$. En déduire la nature de la série $\sum w_n$.

Sujet n°10

Si $(a_n), (b_n), (c_n), (d_n), (e_n), (f_n), (g_n), (h_n), (i_n)$ désignent neuf suites convergentes, de limites respectives $a, b, c, d, e, f, g, h, i$, et si (M_n) est une suite de matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par

$$M_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \\ d_n & e_n & f_n \\ g_n & h_n & i_n \end{pmatrix},$$

on dit que la suite de matrices (M_n) *admet une limite coefficient par coefficient*, et on note

$$\lim_{n\to+\infty} M_n = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}.$$

Si $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on pose, pour tout entier naturel n :

$$S_n(M) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} M^k.$$

Lorsque $(S_n(M))$ admet une limite coefficient par coefficient, on note e^M cette limite.

1. Montrer que, si $D = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ est diagonale, alors e^D existe et vaut $e^D = \begin{pmatrix} e^a & 0 & 0 \\ 0 & e^b & 0 \\ 0 & 0 & e^c \end{pmatrix}$.

2. Dans cette question, la matrice M est donnée par $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

a. Calculer M^2 et M^3 puis, pour tout entier k supérieur ou égal à 3, déterminer M^k.

b. Donner, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, l'expression de $S_n(M)$. En déduire l'existence et l'expression de la matrice e^M.

3. Dans cette question, la matrice M est donnée par $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

a. Calculer M^2.

b. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, déterminer pour tout k de $\mathbb{N}$ l'expression de M^k en fonction de k.

c. Établir, pour tout entier naturel n, l'égalité suivante

$$S_n(M) = I + \frac{1}{3}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{3^k}{k!} - 1\right) M.$$

d. En déduire que e^M existe et que

$$e^M = I + \frac{e^3 - 1}{3} M.$$

Sujet n°11

On considère une grille constituée de neuf cases dans lesquelles sont disposés six symboles cœurs et trois piques. On considère les symboles répartis au hasard. Le joueur gagne si la carte est composée de trois piques alignés (verticalement, horizontalement ou en diagonale).

1. Trouver la probabilité que le joueur gagne.
2. La société de jeu truque les grilles avec une probabilité $t \in]0,1[$, en plaçant un pique en haut à gauche puis en répartissant les cœurs et autres piques aléatoirement dans les cases restantes.
   Quelle est la probabilité que le joueur gagne (en fonction de t)?
3. Le joueur gagne. Trouver la probabilité pour que la carte soit truquée.
4. La grille coute 1 euro et rapporte 10 euros dans le cas où c'est une grille gagnante.
   Calculer les valeurs de t pour lesquelles l'entreprise peut espérer faire des bénéfices.

Sujet n°13

Le but de cet exercice est de présenter une méthode itérative pour trouver une valeur approchée d'une équation du type $f(x) = 0$ sur un intervalle $[a, b]$ où l'on sait que la fonction f est continue, strictement monotone et que $f(a)f(b) < 0$.

1. Justifier qu'en effet $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]a, b[$.

On construit alors trois suites (a_n), (b_n) et (c_n) selon le procédé suivant: $a_0 = a, \qquad b_0 = b, \qquad c_0 = \dfrac{a+b}{2}$.
Puis, supposant a_n, b_n et c_n construits, on définit les termes successifs de la manière suivante:

- ✗ Si $f(a_n)f(c_n) \leq 0$, alors $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = c_n$;
- ✗ Si $f(a_n)f(c_n) > 0$, alors $a_{n+1} = c_n$ et $b_{n+1} = b_n$.

Enfin, on pose dans tous les cas $c_{n+1} = \dfrac{a_{n+1} + b_{n+1}}{2}$.

2. **a.** Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n}$.
   b. Montrer que (a_n) et (b_n) sont adjacentes.
   c. En déduire que (a_n), (b_n) et (c_n) convergent vers une même limite ℓ.
   d. Montrer que la suite $(f(a_n)f(b_n))$ converge et préciser le signe de sa limite. En déduire que $\ell = \alpha$.

3. **a.** Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|c_n - \alpha| \leq \dfrac{b-a}{2^n}$.
   b. Écrire une fonction `Python` d'en-tête `def dichotomie(eps, a, b, f)` qui renvoie une valeur approchée de α à `eps` près.

Sujet n°12

Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme $\mathcal{U}([\![1, n]\!])$. On note pour $i \in [\![1, n]\!]$, M_i le point de coordonnées (u_i, v_i) dans un repère orthonormé, où

$$u_i = \sum_{k=1}^{i} P(X = k), \quad v_i = \frac{1}{\mathbf{E}(X)} \sum_{k=1}^{i} kP(X = k).$$

On appelle *indice de concentration* le réel noté $I(X)$ égal au double de l'aire de la portion du plan compris entre le segment $[OM_n]$ et la ligne polygonale formée en joignant les points $O, M_1, \ldots, M_n$.

1. Calculer les coordonnées de M_n, puis exprimer u_i et v_i en fonction de i et de n.

2. Montrer que $I(X) = \dfrac{n-1}{3n}$.

3. Soit X_1 et X_2 indépendantes de même loi que X.
   Déterminer la loi de $Y = |X_1 - X_2|$.

4. Montrer que $I(X) = \dfrac{\mathbf{E}(Y)}{2\mathbf{E}(X)}$.

3 Bonnes vacances

©Bill Watterson, *Calvin & Hobbes*

Si le délai de réponse est naturellement rallongé pendant la période estivale, la communication reste maintenue et on invite néanmoins à lister les difficultés rencontrées clairement formulées et à prendre contact par courriel (`frederic@gaunard.com`) afin de ne pas rester *bloqué.e* trop longtemps. En particulier, les échanges peuvent être réguliers lors de la deuxième quinzaine du mois d'Août. (Il est par ailleurs capital de s'y *remettre* (bien) avant la rentrée, pour une reprise sous les meilleures auspices.)

Bonnes et belles vacances à tou.te.s!