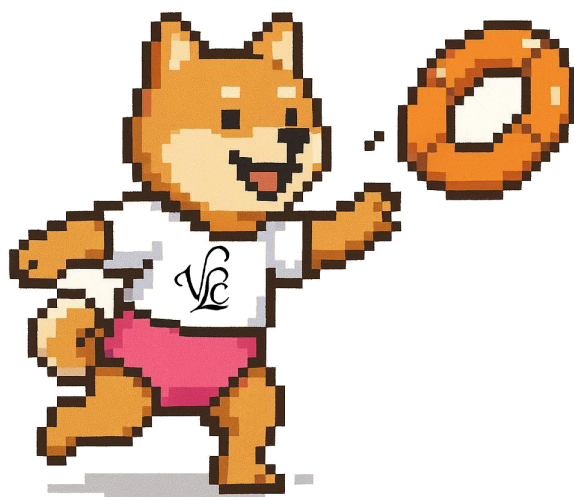




2025

Cahier de vacances : Éléments de solution



Exercices d'oral

Comme promis, on propose la solution des exercices posés lors des oraux de fin d'année en PTSI et présents en fin de cahier.

Sujet n°1

1. a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned} b_{n+1} - b_n &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} a_k - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k = \frac{1}{n(n+1)} \left(n \sum_{k=1}^{n+1} a_k - (n+1) \sum_{k=1}^n a_k \right) \\ b_{n+1} - b_n &= \frac{1}{n(n+1)} \left(na_{n+1} + n \sum_{k=1}^n a_k - n \sum_{k=1}^n a_k - \sum_{k=1}^n a_k \right) = \frac{1}{n(n+1)} \left(na_{n+1} - \sum_{k=1}^n a_k \right) \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, b_{n+1} - b_n = \frac{1}{n(n+1)} \left(na_{n+1} - \sum_{k=1}^n a_k \right).$$

b. La relation précédente donne pour tout entier n non nul.

$$\begin{aligned} b_{n+1} - b_n &= \frac{1}{n(n+1)} \left(na_{n+1} - \sum_{k=1}^n a_k \right) \\ &= \frac{1}{n(n+1)} \left(\sum_{k=1}^n a_{n+1} - \sum_{k=1}^n a_k \right) \quad \text{en remarquant que } na_{n+1} = \sum_{k=1}^n a_{n+1} \\ &= \frac{1}{n(n+1)} \left(\sum_{k=1}^n \underbrace{a_{n+1} - a_k}_{\geq 0} \right) \quad \text{avec } \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, a_{n+1} - a_k \geq 0 \quad \text{car } (a_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ est croissante.} \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $b_{n+1} - b_n \geq 0$ donc la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.

c. La suite (a_n) est croissante et converge vers ℓ donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n \leq \ell$. On a alors :

$$b_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ell = \ell.$$

Ainsi, la suite (b_n) est majorée par ℓ .

Comme cette suite est croissante, on en déduit d'après le théorème de la limite monotone, qu'elle converge.

Ainsi, la suite (b_n) vers un réel ℓ' qui vérifie $\ell' \leq \ell$ (car $b_n \leq \ell$).

d. On a :

$$2b_{2n} - b_n = 2 \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} a_k - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k = \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^{2n} a_k - \sum_{k=1}^n a_k \right) = \frac{1}{n} \sum_{k=n+1}^{2n} a_k$$

Comme la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante, on a pour tout $k \in \llbracket n+1, 2n \rrbracket$, $a_k \geq a_n$, ce qui donne :

$$2b_{2n} - b_n = \frac{1}{n} \sum_{k=n+1}^{2n} a_k \geq \frac{1}{n} \sum_{k=n+1}^{2n} a_n = \frac{1}{n} na_n = a_n$$

Ainsi, pour tout entier n non nul, $2b_{2n} - b_n \geq a_n$.

e. En passant à la limite dans l'inégalité de la question précédente, on obtient :

$$2\ell' - \ell' \geq \ell \implies \ell' \geq \ell$$

Or, on a déjà vu que : $\ell' \leq \ell$, ce qui permet de conclure que $\ell' = \ell$. La suite (b_n) converge vers ℓ .

2. a. On peut utiliser la commande `cumsum()` mais ce n'est pas obligatoire.

```
def suite_b(a) :
    S = np.cumsum( a )
    b = [ S[i]/(i+1) for i in range(len(S))]
    return b
```

b. La liste **a** dans la première ligne du programme contient les premiers termes de la suite (a_n) avec $a_n = 2 - 1/n^2$ qui converge clairement vers $\ell = 2$.

De plus (a_n) est croissante, le résultat démontré affirme la suite (b_n) converge également vers 2 donc la troisième ligne affichera b_{1000} qui sera une valeur proche de 2 (sa limite).

Sujet n°2

1. On peut développer avec la formule du binôme et factoriser en utilisant une différence de carrés.

✗ Pour $n = 1$, $P_1 = (X+1)^2 - 1 = ((X+1)+1)((X+1)-1) = X(X+2) = X^2 + 2X$.

✗ Pour $n = 2$,

$$\begin{aligned} P_2 &= (X+1)^4 - 1 = ((X+1)^2 + 1)((X+1)^2 - 1) \\ &= ((X+1) - i)((X+1) + i)P_1 = (X+1-i)(X+1+i)X(X+2) = X^4 + 4X^3 + 6X^2 + 4X \end{aligned}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On observe que $P_n(0) = 1^{2n} - 1 = 0$ donc 0 est racine de P_n et X divise P_n ce qui permet d'écrire $P_n = XQ_n$ où Q_n est un polynôme de degré $\deg(P_n) - 1 = 2n - 1$.
En effet, P_n est un polynôme de degré $2n$, ce qu'on obtient immédiatement par la formule du binôme. De plus, P_n est unitaire (son coefficient de plus haut degré est égal à 1) et par factorisation par X , il en est de même pour Q_n .
Le terme constant de Q_n est le terme de degré 1 de P_n . Par la formule du binôme, ce coefficient vaut $\binom{2n}{1} = 2n$.

3. Soit a une racine de P_n . On a alors $(a + 1)^{2n} = 1$. En particulier, $a + 1 \neq 0$. Mais $P'_n = 2n(X + 1)^{2n-1}$. Ainsi

$$P'_n(a) = 2n(a + 1)^{2n-1} = \frac{2n}{a + 1}(a + 1)^{2n} = \frac{2n}{a + 1} \neq 0.$$

donc a n'est pas racine double de P_n qui n'a donc que des racines simples.

4. Notant $\mathbb{U}_{2n}$ l'ensemble des racines $2n$ -ème de l'unité :

$$\begin{aligned} z \text{ racine de } P_n &\iff P_n(z) = 0 \iff (z + 1)^{2n} = 1 \iff z + 1 \in \mathbb{U}_{2n} \iff \exists k \in \llbracket 0, 2n - 1 \rrbracket, z + 1 = e^{\frac{2ik\pi}{2n}} \\ &\iff \exists k \in \llbracket 0, 2n - 1 \rrbracket, z = e^{\frac{ik\pi}{2n}} \left(e^{\frac{ik\pi}{2n}} - e^{-\frac{ik\pi}{2n}} \right) = 2i \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) e^{\frac{ik\pi}{2n}} = 2 \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) e^{\frac{i(k+n)\pi}{2n}} \end{aligned}$$

En conclusion, notant $\mathcal{Z}_{P_n}$ l'ensemble des racines de P_n , on a

$$\mathcal{Z}_{P_n} = \left\{ 2 \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) e^{\frac{i(k+n)\pi}{2n}} : k \in \llbracket 0, 2n - 1 \rrbracket \right\}.$$

5. Observons que, notant $\mathcal{Z}_{Q_n}$ l'ensemble des racines de Q_n , on a

$$\mathcal{Z}_{Q_n} = \mathcal{Z}_{P_n} \setminus \{0\} = \left\{ 2 \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) e^{\frac{i(k+n)\pi}{2n}} : k \in \llbracket 1, 2n - 1 \rrbracket \right\}.$$

D'après les relations coefficients/racines et les coefficients de Q_n obtenus à la Question 2., on a

$$\prod_{k=1}^{2n-1} 2 \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) e^{\frac{i(k+n)\pi}{2n}} = (-1)^{2n-1} 2n = -2n.$$

Comme, par ailleurs

$$\prod_{k=1}^{2n-1} 2e^{\frac{i(k+n)\pi}{2n}} = (2i)^{2n-1} \prod_{k=1}^{2n-1} e^{\frac{ik\pi}{2n}} = (2i)^{2n-1} e^{\frac{i\pi}{2n} \sum_{k=1}^{2n-1} k} = (2i)^{2n-1} e^{\frac{(2n-1)i\pi}{2}} = (-2)^{2n-1}.$$

Au final, on peut écrire

$$\prod_{k=1}^{2n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^{2n-1} (-2n) = \frac{n}{2^{2n-2}}.$$

Pour se ramener au produit de la "moitié" des termes, il faut observer que, pour $k = n$, on a $\sin\left(\frac{n\pi}{2n}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ et donc

$$\prod_{k=1}^{2n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \prod_{k=n+1}^{2n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right).$$

Mais alors, on voit aussi que

$$\sin\left(\frac{(2n-k)\pi}{n}\right) = \sin\left(\pi - \frac{k\pi}{n}\right) = \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$

et donc le second produit contient exactement les mêmes termes que le premier. Il suit que

$$\prod_{k=1}^{2n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \left(\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right)^2, \text{ ou encore } \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \sqrt{\prod_{k=1}^{2n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)} = \sqrt{\frac{n}{2^{2n-2}}} = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}.$$

Sujet n°3

1. On calcule $I = \int_0^1 \frac{e^x}{e^x + 1} dx$.

On pose $u = e^x$ (même si ce n'est pas vraiment nécessaire).

La fonction $x \mapsto \varphi(x) = e^x = u$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; 1]$: $du = e^x dx$.

Par changement de variable :

$$I = \int_0^1 \frac{e^x}{e^x + 1} dx = \int_1^e \frac{du}{1 + u} = [\ln(1 + u)]_1^e = \ln(1 + e) - \ln(2).$$

On en déduit que

$$J_0 = \int_0^1 \frac{1}{e^x + 1} dx = \int_0^1 \frac{e^x + 1 - e^x}{e^x + 1} dx$$

$$J_0 = 1 - I = 1 + \ln(2) - \ln(1 + e)$$

2. Soit $n \geq 1$.

La fonction $x \mapsto \frac{e^{-nx}}{e^x + 1}$ est continue et positive sur $[0; 1]$. Ainsi, l'intégrale J_n est positive.

De plus pour tout $x \in [0; 1]$, $\frac{e^{-nx}}{e^x + 1} \leq e^{-nx}$ car $e^x + 1 \geq 1$. Par croissance de l'intégrale :

$$0 \leq J_n \leq \int_0^1 e^{-nx} dx = \left[-\frac{1}{n} e^{-nx} \right]_0^1 = \frac{1}{n} - \frac{1}{e^n} \leq \frac{1}{n}.$$

On en déduit par le théorème des gendarmes que $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = 0$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$.

Pour tout $x \in [0; 1]$, $nx \leq (n+1)x$ donc $-(n+1)x \leq -nx$ et par croissance de la fonction exp sur $\mathbb{R}$, on obtient $e^{-(n+1)x} \leq e^{-nx}$.

Par conséquent, pour tout $x \in [0; 1]$,

$$\frac{e^{-(n+1)x}}{e^x + 1} \leq \frac{e^{-nx}}{e^x + 1}.$$

Par croissance de l'intégrale, on obtient donc

$$J_{n+1} \leq \int_0^1 \frac{e^{-(n+1)x}}{e^x + 1} dx \leq \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{e^x + 1} dx \leq J_n.$$

On en déduit alors

$$\frac{1}{2} (J_n + J_{n+1}) = \frac{1}{2} J_n + \frac{1}{2} J_{n+1} \leq \frac{1}{2} J_n + \frac{1}{2} J_n = J_n$$

et de même,

$$\frac{1}{2} (J_{n-1} + J_n) \geq \frac{1}{2} J_{n-1} + \frac{1}{2} J_n \geq \frac{1}{2} J_n + \frac{1}{2} J_n = J_n$$

4. Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} J_n + J_{n+1} &= \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{e^x + 1} (1 + e^{-x}) dx = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{e^x + 1} \frac{(e^x + 1)}{e^x} dx = \int_0^1 e^{-(n+1)x} dx \\ &= \left[-\frac{1}{(n+1)} e^{-(n+1)x} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)e^{n+1}} = \frac{1}{(n+1)} \left(1 - \frac{1}{e^{n+1}} \right) \end{aligned}$$

5. On utilise l'encadrement obtenu à la Question 3., on trouve :

$$\frac{n}{2} (J_n + J_{n+1}) \leq nJ_n \leq \frac{n}{2} (J_{n-1} + J_n)$$

et par le résultat obtenu à la Question 4. .

$$\frac{n}{2(n+1)} \left(1 - \frac{1}{e^{n+1}} \right) \leq nJ_n \leq \frac{n}{2n} \left(1 - \frac{1}{e^n} \right).$$

Par le théorème des gendarmes, on obtient $\lim_{n \rightarrow +\infty} nJ_n = \frac{1}{2}$.

Sujet n°4

1. Soient $u = (a, b, c)$, $u' = (a', b', c')$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ deux réels. On a

$$\begin{aligned} f(\alpha u + \beta u') &= \alpha u + \beta u' - (\alpha a + \beta a' + \alpha b + \beta b' + \alpha c + \beta c') v \\ &= \alpha (u - (a + b + c)v) + \beta (u' - (a' + b' + c')v) = \alpha f(u) + \beta f(u') \end{aligned}$$

donc f est linéaire. Étant clairement à valeurs dans $\mathbb{R}^3$, c'est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

2. a. Il vient immédiatement que $f(v) = 0$. Or $v \neq 0$ donc $\text{Ker}(f) \neq \{0\}$ et f n'est pas bijectif donc ce n'est pas un automorphisme.

b. On résout. Comme $v \neq 0$,

$$\begin{aligned} u = (a, b, c) \in \text{Ker}(f - \text{Id}) &\iff f(u) - u = 0 \iff (a + b + c)v = 0 \\ &\iff a + b + c = 0 \iff c = -a - b \\ &\iff u = (a, b, -a - b) = a(1, 0, -1) + b(0, 1, -1) \end{aligned}$$

Donc $\text{Ker}(f - \text{Id}) = \text{Vect}((1, 0, -1), (0, 1, -1))$.

c. On raisonne par double implication. Soit $y \in \mathbb{R}^3$.

✕ Il est clair que si $y = f(y)$ alors $y \in \text{Im}(f)$.

✕ Réciproquement, si $y \in \text{Im}(f)$, alors il existe $u = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $y = f(u)$. Mais alors

$$f(y) = f(f(u)) = f(u - (a + b + c)v) = f(u) - (a + b + c)f(v) = f(u) = y$$

car $f(v) = 0$. On a donc la réciproque.

Il suit que $\text{Im}(f) = \text{Ker}(f - \text{Id})$. Il suit qu'en notant $w = (1, 0, -1)$ et $z = (0, 1, -1)$, ces deux vecteurs n'étant pas colinéaires, ils conviennent.

d. Par théorème du rang, $\dim(\text{Ker}(f)) = 3 - \dim(\text{Im}(f)) = 3 - 2 = 1$. Or on sait déjà que $v \neq 0$ est un élément du noyau donc $\text{Ker}(f) = \text{Vect}(v)$.

e. Soient α, β, γ trois réels. On a

$$\begin{aligned} \alpha v + \beta w + \gamma z = 0 &\iff \begin{cases} 2\alpha + \beta = 0 \\ -\alpha + \gamma = 0 \\ -\beta - \gamma = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2\alpha + \beta = 0 \\ \beta + 2\gamma = 0 \\ -\beta - \gamma = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 2\alpha + \beta = 0 \\ \beta + 2\gamma = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases} \iff \alpha = \beta = \gamma = 0 \end{aligned}$$

Donc la famille est bien libre. Étant de cardinal égal à la dimension de l'espace, elle en forme bien une base.

f. Dans la base $\mathcal{C}$, on a sans calcul supplémentaire la matrice de f :

$$\text{Mat}(f, \mathcal{C}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour la base canonique il faut calculer les images par f des trois vecteurs de la base :

$$f(e_1) = e_1 - v = (-1, 1, 0), \quad f(e_2) = e_2 - v = (-2, 2, 0), \quad f(e_3) = e_3 - v = (-2, 1, -1)$$

et donc

$$\text{Mat}(f, \mathcal{C}) = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Sujet n°5

1. Les deux vecteurs ne sont pas colinéaires (et sont au nombre de deux) : ils forment une base de $\mathbb{R}^2$.

2. On voit (par calcul matriciel) que $f(v_1) = v_1$ et $f(v_2) = (1, -1) = v_1 + v_2$ donc $\text{Mat}(f, (v_1, v_2)) = T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est triangulaire supérieure.

3. Q est inversible car ses colonnes sont libres ou car son déterminant est non nul. On obtient immédiatement

$$Q = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad QTQ^{-1} = B.$$

4. Par définition de (Σ) , en observant que $X = QZ$ et $X' = QZ'$

$$\begin{aligned} (x, y) \text{ solution de } (\Sigma) &\iff \begin{cases} x' = -x - 4y \\ y' = x + 3y \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff X' = BX \\ &\iff QZ' = QTQ^{-1}X \iff QZ' = QTZ \\ &\iff Z' = TZ \end{aligned}$$

5. Notant $Z = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$, on a

$$Z' = TZ \iff \begin{cases} \alpha' = \alpha + \beta \\ \beta' = \beta \end{cases}$$

La seconde équation différentielle est linéaire, homogène d'ordre 1 à coeff. constant. On a tout de suite $\beta : t \mapsto \lambda_1 e^t$ pour un certain $\lambda_1 \in \mathbb{R}$.

On a alors une seconde équation avec second membre

$$\alpha' - \alpha = \lambda_1 e^t$$

L'équation homogène a pour solution $\alpha : t \mapsto \lambda_2 e^t$. On cherche une solution particulière par variation de la constante, c'est à dire sous la forme $\alpha_p : t \mapsto \lambda_2(t) e^t$ avec λ_2 fonction dérivable à déterminer mais qui vérifie $\lambda_2'(t) e^t = \lambda_1 e^t$ donc $\lambda_2'(t) = \lambda_1$, on prend donc $\lambda_2 : t \mapsto \lambda_1 t$ et on peut alors écrire

$$\alpha : t \mapsto (\lambda_2 + \lambda_1 t) e^t, \quad \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

6. Il suffit de revenir à X en appliquant Q :

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = QZ(t) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\lambda_2 + \lambda_1 t) e^t \\ \lambda_1 e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2\lambda_2 - \lambda_1 + 2\lambda_1 t) e^t \\ (\lambda_2 + \lambda_1 t) e^t \end{pmatrix}$$

Sujet n°6

1. On peut piocher le premier roi rouge dès le premier coup mais on peut aussi, dans le cas extrême, piocher toutes les autres cartes (il y en a $2n - 2$) avant d'obtenir le premier roi rouge à la $(2n - 1)$ -ème pioche. Toutes les valeurs intermédiaires étant possibles, on a

$$X(\Omega) = \llbracket 1, 2n - 1 \rrbracket.$$

2. Commençons par introduire les événements R_j "la carte retournée à la j -ème pioche est un roi rouge". Soit $k \in X(\Omega)$. On a

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X = k) &= \mathbf{P}\left(\bigcap_{j=1}^{k-1} \bar{R}_j \cap R_k\right) \\ &= \mathbf{P}(\bar{R}_1) \mathbf{P}_{\bar{R}_1}(\bar{R}_2) \dots \mathbf{P}_{\bigcap_{j=1}^{k-2} \bar{R}_j}(\bar{R}_{k-1}) \mathbf{P}_{\bigcap_{j=1}^{k-1} \bar{R}_j}(R_k) \quad (\text{formule des probabilités composées}) \\ &= \frac{2n-2}{2n} \times \frac{2n-3}{2n-1} \times \dots \times \frac{2n-2-(k-2)}{2n-(k-2)} \times \frac{2}{2n-(k-1)} \\ &= \frac{(2n-k+1)(2n-k)}{2n(2n-1)} \times \frac{2}{2n-k+1} \quad (\text{par télescopage}) \\ &= \frac{2n-k}{n(2n-1)}, \end{aligned}$$

ce qui est bien la formule attendue.

3. Par définition de l'espérance et par la formule de la question précédente, on a

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(X) &= \sum_{k=1}^{2n-1} k \mathbf{P}(X = k) = \frac{1}{n(2n-1)} \left(2n \sum_{k=1}^{2n-1} k - \sum_{k=1}^{2n-1} k^2 \right) \\ &= \frac{1}{n(2n-1)} \left(2n \frac{(2n-1)2n}{2} - \frac{(2n-1)2n(4n-1)}{6} \right) \\ &= 2n - \frac{4n-1}{3} \\ &= \frac{2n+1}{3}, \end{aligned}$$

ce qu'on voulait. Easy.

4. Sans difficulté d'après ce qui précède, on a $G_1 = a - X_1$. Par linéarité de l'espérance, on en déduit donc que

$$\mathbf{E}(G_1) = a - \mathbf{E}(X_1) = a - \frac{2n+1}{3}.$$

5. Soit $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$. Dans ce cas, $\mathbf{P}(G_2 = a - k) = \mathbf{P}(X = k) = \frac{2n-k}{n(2n-1)}$.

6. En revanche,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(G_2 = -n) &= P\left(\bigcap_{j=1}^n \overline{R_j}\right) \\ &= \mathbf{P}(\overline{R_1}) \cdots \mathbf{P}_{\bigcap_{j=1}^{n-1} \overline{R_j}}(\overline{R_n}) \\ &= \frac{2n-2}{2n} \times \frac{2n-3}{2n-1} \times \cdots \times \frac{2n-2-(n-2)}{2n-(n-2)} \times \frac{2n-2-(n-1)}{2n-(n-1)} = \frac{n(n-1)}{2n(2n-1)} = \frac{n-1}{2(2n-1)}. \end{aligned}$$

7. Le calcul est un poil.. tenace. On se retrousse les manches et c'est parti.

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(G_2) &= \sum_{k=1}^n (a-k) \mathbf{P}(G_2 = a-k) - n \mathbf{P}(G_2 = -n) = \sum_{k=1}^n (a-k) \frac{2n-k}{n(2n-1)} - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} \\ &= \frac{1}{2n-1} \left(\frac{2na}{n} \sum_{k=1}^n 1 - \frac{a+2n}{n} \sum_{k=1}^n k + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k^2 \right) - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} \\ &= \frac{1}{2n-1} \times \frac{(12n-3(n+1))a - 6n(n+1) + (n+1)(2n+1)}{6} - \frac{3n(n-1)}{6(2n-1)} \\ &= \frac{3(3n-1)a - (7n^2-1)}{6(2n-1)}. \end{aligned}$$

Sujet n°7

Soit D la droite passant par $A(3, 2, 1)$ et dirigée par $\vec{u}(1, -1, 3)$ et D' la droite passant par $B(2, 1, -2)$ et dirigée par $\vec{v}(-1, 0, 2)$. On pose $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$.

- Les droites D et D' ne sont pas parallèles car leurs vecteurs directeurs $\vec{u}, \vec{v}$ ne sont pas colinéaires.
Par ailleurs, les droites D et D' ne sont pas sécantes. Une représentation paramétrique de D et un système d'équations cartésiennes :

$$\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 2 - t \\ z = 1 + 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \iff \begin{cases} x + y = 5 \\ 3x - z = 8 \end{cases}$$

Une représentation paramétrique de D' et un système d'équations cartésiennes :

$$\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 \\ z = -2 + 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \iff \begin{cases} 2x + z = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

En reportant les conditions $y = 1$ et $z = 2(1 - x)$ dans le système définissant D , on obtient :

$$\begin{cases} x + 1 = 5 \\ 3x - 2(1 - x) = 8 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 4 \\ x = 2 \end{cases}$$

Ce système est impossible $D \cap D' = \emptyset$.

Conclusion : les droites D et D' n'étant ni sécantes ni parallèles, elles ne sont pas coplanaires.

- Le plan P est dirigé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ avec :

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Le plan P admet pour vecteur normal :

$$\vec{u} \wedge \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ -5 \\ -7 \end{pmatrix}$$

Une équation est de la forme $16x - 5y - 7z = d$ et on détermine d en utilisant le fait que $A(3, 2, 1) \in P : 48 - 10 - 7 = d \iff d = 32$.

Ainsi, $P : 16x - 5y - 7z = 32$.

3. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ un point d'intersection de D' et P .
Ses coordonnées vérifient :

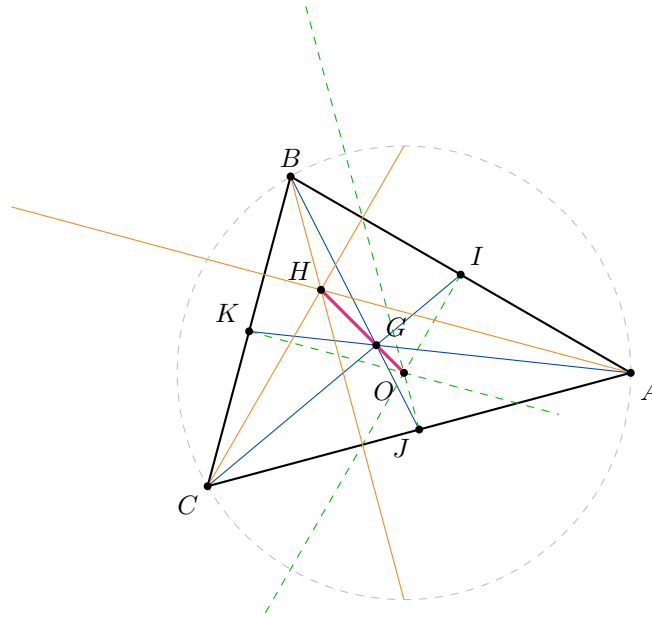
$$\begin{cases} 16x - 5y - 7z = 31 \\ \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 \\ z = -2 + 2t \end{cases} \end{cases}$$

On trouve $t = \frac{1}{3}$ puis $C(x, y, z) = (\frac{5}{3}, 1, -\frac{4}{3})$. $\mathcal{P} \cap \mathcal{D}' = \{(\frac{5}{3}, 1, -\frac{4}{3})\}$.

4. Soit Δ la droite passant par C et dirigée par $\vec{w}$.

Montrons que Δ est perpendiculaire à D et D' . La droite Δ est dirigée par le vecteur $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$. Ce vecteur est par définition orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$. Ces deux derniers vecteurs dirigeant respectivement D et D' on en déduit que $\Delta \perp D$ et $\Delta \perp D'$.

Sujet n°9



On note R le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC . $OA = OB = OC = R$ donc $|a| = |b| = |c| = R$, car $z_O = 0$.
On note I, J, K les milieux respectifs des segments $[AB], [AC], [BC]$.

✕ $OA = OB$ donc O est sur la médiatrice de $[AB]$. De même, O est sur celle de $[AC]$ et sur celle $[BC]$, donc les trois médiatrices de ABC sont concourantes en O .

✕ Notons G le point d'affixe $\frac{a+b+c}{3}$. On a :

$$\frac{z_{\vec{CG}}}{z_{\vec{CI}}} = \frac{\frac{a+b+c}{3} - c}{\frac{a+b}{2} - c} = \frac{\frac{a+b-2c}{3}}{\frac{a+b-2c}{2}} = \frac{2}{3} \in \mathbb{R}$$

donc $\overrightarrow{CG}$ et $\overrightarrow{CI}$ sont colinéaires $\left(\overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CI}\right)$ et G est sur la médiane (CI) du triangle ABC . On montre de même que G est sur les médianes (BJ) et (AK) du triangle ABC . Donc les trois médianes de ABC sont concourantes en G .

✕ Enfin :

$$\frac{z_{\overrightarrow{CH}}}{z_{\overrightarrow{AB}}} = \frac{a+b+c-c}{b-a} = \frac{(b+a)(\bar{b}-\bar{a})}{|b-a|^2} = \frac{a\bar{b}-\bar{a}b}{|b-a|^2} = i \left(\frac{2 \operatorname{Im}(a\bar{b})}{|b-a|^2} \right) \in i\mathbb{R}$$

donc $\overrightarrow{CH} \perp \overrightarrow{AB}$ et H est sur la hauteur du triangle ABC issue de C .

On montre de même que H est sur la hauteur du triangle ABC issue de B et celle issue de A .

Donc les trois hauteurs de ABC sont concourantes en H .

Au final, on observe que $\frac{z_{\overrightarrow{OG}}}{z_{\overrightarrow{OH}}} = \frac{\frac{a+b+c}{3}}{a+b+c} = \frac{1}{3} \in \mathbb{R}$ donc $\overrightarrow{OG}$ et $\overrightarrow{OH}$ sont colinéaires $\left(\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OH}\right)$ et O, G, H sont alignés.

La droite (OG) s'appelle la *droite d'Euler*.

Sujet n° 8

- f est continue et strictement monotone sur $[a, b]$: elle réalise donc (d'après le corollaire du TVI appelé **Théorème de la bijection monotone**) une bijection de $[a, b]$ sur $[f(a), f(b)]$ ou sur $[f(b), f(a)]$ selon qu'elle est strictement croissante ou strictement décroissante.

Comme $f(a)f(b) < 0$, $f(a)$ et $f(b)$ sont de signe opposés. Ainsi 0 est dans l'intervalle image (on aura $f(a) < 0 < f(b)$ si f est croissante ou $f(b) < 0 < f(a)$ si décroissante). Il suit que 0 admet un unique antécédent par f sur $[a, b]$ ou encore que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $[a, b]$.

- a. On procède par récurrence.

✕ Initialisation. Pour $n = 0$, $b_0 - a_0 = b - a = \frac{b-a}{2^0}$ et la formule est vérifiée.

✕ Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$. Montrons que $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b-a}{2^{n+1}}$. On raisonne par disjonction de cas :

✓ Si $f(a_n)f(c_n) \leq 0$, alors

$$b_{n+1} - a_{n+1} = c_n - a_n = \frac{a_n + b_n}{2} - a_n = \frac{b_n - a_n}{2} \stackrel{\text{H.R.}}{=} \frac{b-a}{2^{n+1}}$$

✓ Si $f(a_n)f(c_n) > 0$, alors

$$b_{n+1} - a_{n+1} = b_n - c_n = b_n - \frac{a_n + b_n}{2} = \frac{b_n - a_n}{2} \stackrel{\text{H.R.}}{=} \frac{b-a}{2^{n+1}}$$

Dans tous les cas, on a la formule au rang $n+1$, ce qui montre son caractère héréditaire et termine la récurrence.

- b. Le résultat de la question précédente implique immédiatement que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (b_n - a_n) = 0$. Il reste donc à montrer que (a_n) est croissante et que (b_n) est décroissante. On traite seulement le cas de (a_n) ; les arguments sont similaires pour l'autre suite. Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$a_{n+1} - a_n = \begin{cases} 0, & \text{si } f(a_n)f(c_n) \leq 0 \\ c_n - a_n = \frac{b-a}{2^{n+1}} \geq 0, & \text{si } f(a_n)f(c_n) > 0 \end{cases}$$

Dans tous les cas la différence est positive ou nulle et (a_n) est croissante. De même on montre donc que (b_n) est décroissante et leur différence tendant vers 0 les deux suites sont bien adjacentes.

- c. Par le **Théorème des suites adjacentes**, (a_n) et (b_n) convergent vers une même limite ℓ . Comme $a_n \leq c_n \leq b_n$, le **Théorème des gendarmes de Saint Tropez** assure que (c_n) converge aussi vers cette même limite.
- d. Comme f est continue sur $[a, b]$, on a $f(a_n) \rightarrow f(\ell)$ et $f(b_n) \rightarrow f(\ell)$ donc $f(a_n)f(b_n) \rightarrow f(\ell)^2 \geq 0$. Il faut alors vérifier qu'on a aussi, $f(a_n)f(b_n) \leq 0$. Auquel cas $f(\ell) = 0$ et par unicité, $\ell = \alpha$. On procède à nouveau par récurrence.

✕ Initialisation. Pour $n = 0$, $f(a_0)f(b_0) = f(a)f(b) < 0$ par hypothèse.

✗ **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $f(a_n)f(b_n) \leq 0$. Montrons que $f(a_{n+1})f(b_{n+1}) \leq 0$. On raisonne par disjonction de cas :

✓ Si $f(a_n)f(c_n) \leq 0$, alors

$$f(a_{n+1})f(b_{n+1}) = f(a_n)f(c_n) \leq 0.$$

✓ Si $f(a_n)f(c_n) > 0$, alors $f(a_n)$ et $f(c_n)$ sont de même signe et

$$f(a_{n+1})f(b_{n+1}) = f(b_n)f(c_n) \leq 0$$

car $f(b_n)f(c_n)$ du même signe que $f(b_n)f(a_n) \leq 0$ par H.R.

La récurrence est terminée.

3. a. La distance entre c_n et α est contrôlée par la taille de l'intervalle dans lequel vivent les deux éléments (on a $a_n \leq \alpha \leq b_n$ et $a_n \leq c_n \leq b_n$) donc on a tout de suite le résultat.
b. Programme de dichotomie classique.

```
def dichotomie(eps, a, b, f) :
    left=a
    right=b
    n=0
    mid = (a+b)/2
    while np.abs(b-a)/2**n >= eps :
        n=n+1
        if f(left)*f(mid) <=0 :
            right=mid
        else :
            left=mid
        mid = (a+b)/2
    return mid
```

Sujet n°10

1. Soit $D = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$. Comme D est diagonale, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $D^k = \begin{pmatrix} a^k & 0 & 0 \\ 0 & b^k & 0 \\ 0 & 0 & c^k \end{pmatrix}$. De sorte que

$$S_n(D) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} D^k = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^n \frac{a^k}{k!} & 0 & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^n \frac{b^k}{k!} & 0 \\ 0 & 0 & \sum_{k=0}^n \frac{c^k}{k!} \end{pmatrix}.$$

On reconnaît alors sur la diagonale les sommes partielles de trois séries exponentielles de paramètres respectifs a, b et c qui convergent toutes les trois respectivement vers e^a , e^b et e^c . D'après la définition de l'énoncé, on peut donc conclure que e^D existe et vaut bien

$$e^D = \begin{pmatrix} e^a & 0 & 0 \\ 0 & e^b & 0 \\ 0 & 0 & e^c \end{pmatrix}.$$

2. a. Le calcul donne $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ puis $A^3 = 0$. Ainsi, une récurrence immédiate permet d'obtenir $A^k = 0$ pour $k \geq 3$.

b. Il suit que, pour tout $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} S_n(A) &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} A^k = \sum_{k=0}^2 \frac{1}{k!} A^k = I + A + \frac{1}{2} A^2 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Les coefficients de $S_n(A)$ sont constants. et admettent donc chacun une limite en $+\infty$ égale à la valeur de la constante. On peut donc conclure ici que e^A existe et que (pour tout $n \geq 2$)

$$e^A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = S_n(A).$$

3. a. Le calcul donne $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3A$.

b. Une récurrence (à faire) donne pour tout $k \geq 1$, $A^k = 3^{k-1} A$.

c. On va utiliser la relation précédente pour remplacer A^k dans le calcul de $S_n(A)$. Attention cependant, cette formule n'est valable que pour $k \geq 1$, et la somme définissant $S_n(A)$ commence à $k = 0$.

$$\begin{aligned} S_n(A) &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} A^k = I + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} A^k = I + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} 3^{k-1} A = I + \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} 3^k A \\ &= I + \frac{1}{3} \left(\sum_{k=0}^n \frac{3^k}{k!} - \frac{3^0}{0!} \right) A = I + \frac{1}{3} \left(\sum_{k=0}^n \frac{3^k}{k!} - 1 \right) A. \end{aligned}$$

d. Comme, en ayant reconnu une somme partielle de série exponentielle, on a

$$\frac{1}{3} \left(\sum_{k=0}^n \frac{3^k}{k!} - 1 \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3} (e^3 - 1),$$

on en conclut que tous les coefficients de $S_n(A)$ admettent une limite. Ainsi, e^A existe et vaut

$$e^A = \begin{pmatrix} 1 + \frac{e^3-1}{3} & \frac{e^3-1}{3} & \frac{e^3-1}{3} \\ \frac{e^3-1}{3} & 1 + \frac{e^3-1}{3} & \frac{e^3-1}{3} \\ \frac{e^3-1}{3} & \frac{e^3-1}{3} & 1 + \frac{e^3-1}{3} \end{pmatrix} = I + \frac{e^3-1}{3} A.$$

Sujet n°11

Ce sujet provient d'un oral Math II 2022.

1. C'est une question... de dénombrement.

On commence par compter le nombre de grilles différentes : il y a neuf cases. On a $\binom{9}{3} = 84$ façons de choisir où placer les pique, mais automatiquement les autres cases seront occupées par des coeurs donc il y a 84 grilles différentes. Il y a 3 lignes, 3 colonnes et deux diagonales donc 8 grilles gagnantes.

La probabilité cherchée est donc $\frac{8}{84} = \frac{2}{21}$.

2. La carte a une probabilité t d'être truquée. Notons T l'évènement « la carte est truquée » et G « le joueur gagne ». Par la formule des probabilités totales (avec le s.c.e $\{T, \bar{T}\}$, on a

$$\mathbf{P}(G) = \mathbf{P}(G|T)\mathbf{P}(T) + \mathbf{P}(G|\bar{T})\mathbf{P}(\bar{T}) = (\mathbf{P}(G|T) - \mathbf{P}(G|\bar{T}))t + \mathbf{P}(G|\bar{T}).$$

D'après la question précédente, $\mathbf{P}(G|\bar{T}) = \frac{2}{21}$.

Utilisons un raisonnement de dénombrement analogue pour les cartes truquées. Il y a 2 piques à placer sur les 8 cases restantes donc $\binom{8}{2} = 28$ grilles différentes. Il n'y a plus que 3 situations où les piques sont alignés (première ligne,

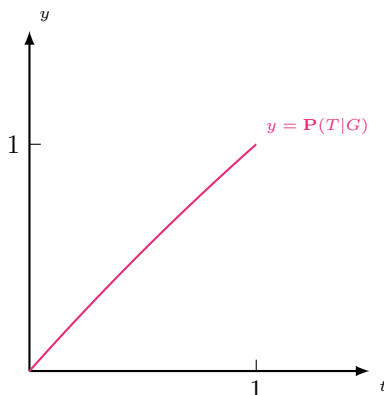
première colonne ou diagonale) donc $\mathbf{P}(G|T) = \frac{3}{28}$. Il suit que

$$\mathbf{P}(G) = \frac{t+8}{84}.$$

3. C'est une question d'inversement du conditionnement. On pense à la formule de Bayes mais en fait on retrouve ce qu'on a besoin de calculer avec la définition d'une probabilité conditionnelle.

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(T|G) &= \frac{\mathbf{P}(T \cap G)}{\mathbf{P}(G)} = \frac{\mathbf{P}(G|T)\mathbf{P}(T)}{\mathbf{P}(G)} = \frac{3t}{28} \times \frac{84}{t+8} \\ &= \frac{9t}{t+8} \end{aligned}$$

Remarque. On représente ci-dessous l'évolution de cette probabilité avec t (on peut demander à l'étudiant.e de la tracer)



4. Soit X la v.a qui prend la valeur du gain moyen du joueur par grille. On peut écrire

$$X = 9\mathbb{I}_G - \mathbb{I}_{\overline{G}}.$$

où, pour A un évènement, on a noté $\mathbb{I}_A \sim \mathcal{B}(\mathbf{P}(A))$ la variable aléatoire indicatrice de A . (Selon le temps on peut introduire et faire travailler l'étudiant.e avec la notion de v.a indicatrice - déterminer la loi, calculer l'espérance...)

On a donc

$$\mathbf{E}(X) = 9\mathbf{P}(G) - \mathbf{P}(\overline{G}) = 10\mathbf{P}(G) - 1 = \frac{5t-2}{42} < 0 \iff t < \frac{2}{5}.$$

Remarque. On (ou plutôt je) ne comprend(s) pas bien l'intérêt pour l'entreprise de truquer les cartes...

Sujet n°13

Le but de cet exercice est de présenter une méthode itérative pour trouver une valeur approchée d'une équation du type $f(x) = 0$ sur un intervalle $[a, b]$ où l'on sait que la fonction f est continue, strictement monotone et que $f(a)f(b) < 0$.

1. Justifier qu'en effet $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]a, b[$.

On construit alors trois suites (a_n) , (b_n) et (c_n) selon le procédé suivant: $a_0 = a$, $b_0 = b$, $c_0 = \frac{a+b}{2}$.

Puis, supposant a_n, b_n et c_n construits, on définit les termes successifs de la manière suivante:

- ✕ Si $f(a_n)f(c_n) \leq 0$, alors $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = c_n$;
- ✕ Si $f(a_n)f(c_n) > 0$, alors $a_{n+1} = c_n$ et $b_{n+1} = b_n$.

Enfin, on pose dans tous les cas $c_{n+1} = \frac{a_{n+1} + b_{n+1}}{2}$.

2. a. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$.
 b. Montrer que (a_n) et (b_n) sont adjacentes.
 c. En déduire que (a_n) , (b_n) et (c_n) convergent vers une même limite ℓ .
 d. Montrer que la suite $(f(a_n)f(b_n))$ converge et préciser le signe de sa limite. En déduire que $\ell = \alpha$.
3. a. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|c_n - \alpha| \leq \frac{b-a}{2^n}$.

- b. Écrire une fonction Python d'en-tête `def dichotomie(eps, a, b, f)` qui renvoie une valeur approchée de α à eps près.

Sujet n°12

Extrait de Oral Math II 2024.

1. Il est clair que M_n a pour coordonnées $(1, 1)$.

De plus, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$

$$u_i = \sum_{k=1}^i \frac{1}{n} = \frac{i}{n}, \quad v_i = \frac{1}{n\mathbf{E}(X)} \sum_{k=1}^i k = \frac{2}{n(n+1)} \times \frac{i(i+1)}{2} = \frac{i(i+1)}{n(n+1)}.$$

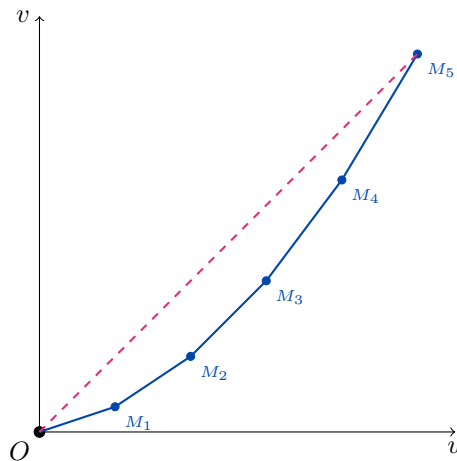
2. On note $\mathcal{A}_n$ l'aire de la zone comprise entre la ligne brisée et l'axe des abscisses.

L'aire d'un trapèze est la moitié du produit de sa hauteur par la moyenne des longueurs. Comme $I(X)$ désigne le double de l'aire de la portion du plan définie comme réunion de trapèzes, on peut écrire (en n'oubliant pas l'aire du triangle)

$$\mathcal{A}_n = \frac{2}{n^2(n+1)} + \sum_{i=1}^{n-1} (u_{i+1} - u_i)(v_i + v_{i+1}) = \frac{2}{n^2(n+1)} \sum_{i=0}^{n-1} (i+1)^2 = \frac{2n+1}{3n}.$$

Il faut alors retrancher cette aire au double de celle du triangle rectangle d'hypothénuse $[OM_n]$. On obtient alors

$$I(X) = 1 - \mathcal{A}_n = 1 - \frac{2n+1}{3n} = \frac{n-1}{3n}.$$



3. Classique avec la FPT. D'abord $Y(\Omega) = \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. Soit $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$.

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(Y=0) &= \mathbf{P}(X_1 = X_2) = \sum_{i=1}^n \mathbf{P}(X_1 = i) \mathbf{P}(X_2 = i) = \frac{1}{n} \\ \mathbf{P}(Y=k) &= 2\mathbf{P}(X_1 = X_2 + k) = \sum_{i=1}^{n-k} \mathbf{P}(X_1 = i+k) \mathbf{P}(X_2 = i) \\ &= \frac{2(n-k)}{n^2} \end{aligned}$$

(On vérifie bien que $\sum_{k=1}^{n-1} \mathbf{P}(Y=k) + \mathbf{P}(Y=0) = 1$.)

4. Il suffit de calculer $\mathbf{E}(Y)$.

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(Y) &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2k(n-k)}{n^2} = \frac{2}{n^2} \sum_{k=1}^{n-1} k(n-k) \\ &= \frac{2}{n} \times \frac{(n-1)n}{2} - \frac{2}{n^2} \times \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \\ &= \frac{(n-1)(n+1)}{3}\end{aligned}$$

Comme $2\mathbf{E}(X) = n + 1$, on a bien le résultat demandé.