Math PT. 2025 - 2026

Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
Lycée Voltaire, Paris 11e.

0 Remise en route (Révisions) - Élements de solution

6 Autres exercices

6.1 Manipulation de sommes, de produits

Exercice 28.
Calculer, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$(i)\ \prod_{i=0}^{n} 2^i, \qquad (ii)\ \prod_{i=1}^{n} \frac{i+1}{2}, \qquad (iii)\ \prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{1}{k}\right).$$

Solution.

$$\begin{aligned}
(i)\ \prod_{i=0}^{n} 2^i &= 2^{\sum_{i=0}^{n}} = 2^{\frac{n(n+1)}{2}} \\
(ii)\ \prod_{i=1}^{n} \frac{i+1}{2} &= \left(\frac{1}{2}\right)^n \prod_{i=1}^{n}(i+1) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \prod_{j=2}^{n+1} j = \left(\frac{1}{2}\right)^n \prod_{j=1}^{n+1} j = \left(\frac{1}{2}\right)^n (n+1)! \\
(iii)\ \prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{1}{k}\right) &= \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{k+1}{k}\right) = \frac{\prod_{k=1}^{n}(k+1)}{\prod_{k=1}^{n} k} = \frac{\prod_{j=2}^{n} j}{\prod_{k=1}^{n} k} = n+1
\end{aligned}$$

$\square$

Exercice 29.
Calculer, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$(i)\ \sum_{1\le i,j\le n} \min(i,j), \qquad (ii)\ \sum_{1\le i<j\le n} \frac{i}{j}, \qquad (iii)\ \sum_{1\le i,j\le n} \ln(i^j).$$

Solution. Commençons par observer que $\min(i,j) = \begin{cases} i, & \text{si } i<j \\ j, & \text{si } i \ge j \end{cases}$.

$$\begin{aligned}
(i)\ \sum_{1\le i,j\le n} \min(i,j) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \min(i,j) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i} j + \sum_{j=i+1}^{n} i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i(i+1)}{2} + i(n-i)\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)i - \frac{i^2}{2}\right) \\
&= \frac{2n+1}{2}\sum_{i=1}^{n} i - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{4} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{12} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(ii) \quad \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{i}{j} &= \sum_{i=1}^{n-1} i \sum_{j=i+1}^{n} \frac{1}{j} = \sum_{j=2}^{n} \frac{1}{j} \sum_{i=1}^{j-1} i \\
&= \sum_{j=2}^{n} \frac{1}{j} \times \frac{j(j-1)}{2} = \frac{1}{2} \sum_{j=2}^{n} (j-1) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{(n-1)n}{4}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(iii) \quad \sum_{1 \leq i,j \leq n} \ln(i^j) &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} j \ln(i) = \left(\sum_{i=1}^{n} \ln(i) \right) \left(\sum_{j=1}^{n} j \right) \\
&= \frac{n(n+1)}{2} \ln \left(\prod_{i=1}^{n} i \right) = \frac{n(n+1)}{2} \ln(n!)
\end{aligned}
$$

□

6.2 Équations trigonométriques

Exercice 30.

Résoudre dans $\mathbb{R}$, puis dans $[-\pi, \pi]$ les équations et inéquations suivantes :

(i) $\cos(5x) - \sin(5x) = 0$

(ii) $\cos(2x) + \left(\sqrt{3} + 2\right) \cos(x) + 1 + \sqrt{3} = 0$

(iii) $\tan(x) \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -1$

(iv) $\cos(3x) - \sin(3x) < \sqrt{2}$

(v) $\sqrt{2}\,(\cos(5x) - \sin(5x)) - \left(\cos(x) + \sqrt{3}\sin(x)\right) = 0$

(vi) $\cos(x) + \cos 7x = \cos(3x)$

(vii) $\cos(x) - \cos 2x = \sin(3x)$

$(viii)$ $\cos(2x) - 9\cos(x) + 5 > 0$

Solution. On note à chaque fois $\mathscr{S}_{\mathbb{R}}$ l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation considérée, et $\mathscr{S}_{]-\pi,\pi]}$ l'ensemble des solutions dans $]-\pi, \pi]$.

i. ✗ Méthode 1 : Si x est solution, alors $\cos 5x \neq 0$ (si $\cos 5x$ était nul, $\sin 5x$ vaudrait ± 1, et donc l'équation ne serait pas satisfaite). On peut donc tout diviser par $\cos 5x$. L'équation est successivement équivalente à : $\tan 5x = 1$, puis $5x \equiv \frac{\pi}{4} \pmod{\pi}$, puis $x \equiv \frac{\pi}{20} \left(\text{mod } \frac{\pi}{5}\right)$.
Dans $]-\pi, \pi]$, les solutions sont

$$\frac{-19\pi}{20}, \frac{-15\pi}{20}, \frac{-11\pi}{20}, \frac{-7\pi}{20}, \frac{-3\pi}{20}, \frac{\pi}{20}, \frac{5\pi}{20}, \frac{9\pi}{20}, \frac{13\pi}{20}, \frac{17\pi}{20}.$$

✗ Méthode 2 : L'équation équivaut à $\cos 5x = \sin 5x$, c'est-à-dire $\cos 5x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 5x\right)$, que l'on sait résoudre...

✗ Méthode 3 : l'équation équivaut à $\sqrt{2} \cos\left(5x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$, que l'on sait résoudre...

ii. Soit $x \in \mathbb{R}$. On commence par utiliser la formule de duplication du cosinus : ainsi l'équation s'écrit $2\cos^2(x) + \left(\sqrt{3} + 2\right) \cos(x) + \sqrt{3} = 0$.
On pose alors $X = \cos(x)$; on se ramène ainsi à la recherche de racine d'un trinôme du second degré :

$$2\cos^2(x) + \left(\sqrt{3} + 2\right) \cos(x) + \sqrt{3} = 0 \iff 2X^2 + \left(\sqrt{3} + 2\right) X + \sqrt{3} = 0.$$

Le discriminant du trinôme vaut alors :

$$\Delta = \left(\sqrt{3} + 2\right)^2 - 8\sqrt{3} = (3 + 4\sqrt{3} + 4) - 8\sqrt{3} = 3 - 4\sqrt{3} + 4 = \left(\sqrt{3} - 2\right)^2.$$

On en déduit alors les deux racines du trinôme : -1 et $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. Ainsi :

$$
\begin{aligned}
& 2\cos^2(x) + \left(\sqrt{3} + 2\right) \cos(x) + \sqrt{3} = 0 \\
\iff & \cos(x) = -1 \text{ ou } \cos(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\
\iff & x \equiv \pi \pmod{2\pi} \text{ ou } x \equiv \frac{5\pi}{6} \pmod{2\pi} \text{ ou } x \equiv \frac{-5\pi}{6} \pmod{2\pi}
\end{aligned}
$$

D'où le résultat :

$$\mathscr{S}_{\mathbb{R}} = \{(2k+1)\pi : k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{\frac{5\pi}{6} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{5\pi}{6} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\} \text{ et } \mathscr{S}_{]-\pi,\pi]} = \left\{-\frac{5\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \pi\right\}.$$

iii. Avant de résoudre cette équation, il faut déterminer pour quelles valeurs de x elle a un sens. Pour que $\tan(x)$ soit défini, il faut et il suffit que $x \not\equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$.

De même, pour que $\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ soit défini, il faut et il suffit que $x + \frac{\pi}{4} \not\equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$, ce qui équivaut à $n \not\equiv \frac{\pi}{4} \pmod{\pi}$.

L'équation est défini pour $x \not\equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$ et $x \not\equiv \frac{\pi}{4} \pmod{\pi}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x \not\equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$ et $x \not\equiv \frac{\pi}{4} \pmod{\pi}$. Alors, en utilisant une formule d'addition, on obtient :

$$\begin{aligned}
\tan(x)\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -1 &\iff \tan(x)\frac{1+\tan(x)}{1-\tan(x)} = -1 \\
&\iff \tan^2(x) + \tan(x) = \tan(x) - 1 \\
&\iff \tan^2(x) = -1
\end{aligned}$$

Comme un carré n'est jamais strictement négatif, on en déduit directement le résultat : $\mathscr{S}_{\mathbb{R}} = \emptyset$ et $\mathscr{S}_{]-\pi,\pi]} = \emptyset$.

iv. Soit $x \in \mathbb{R}$. En utilisant une formule d'addition, on obtient :

$$\begin{aligned}
\cos(3x) - \sin(3x) < \sqrt{2} &\iff \sqrt{2}\cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) < \sqrt{2} \\
&\iff \cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) < 1 \\
&\iff \cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) \neq 1 \qquad \text{car un cosinus est toujours dans l'intervalle }]-1,1[
\end{aligned}$$

D'autre part, on a :

$$\cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \iff 3x + \frac{\pi}{4} \equiv 0 \pmod{2\pi} \iff 3x \equiv -\frac{\pi}{4} \pmod{2\pi} \iff x \equiv -\frac{\pi}{12} \pmod{\frac{2\pi}{3}}.$$

On en déduit le résultat :

$$\mathscr{S}_{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3} : k \in \mathbb{Z}\right\} \text{ et } \mathscr{S}_{]-\pi,\pi]} =]-\pi,\pi] \setminus \left\{-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}\right\}.$$

v. Soit $x \in \mathbb{R}$. En utilisant les formules d'additions puis de factorisation, on obtient :

$$\begin{aligned}
&\sqrt{2}\left(\cos(5x) - \sin(5x)\right) - \left(\cos(x) + \sqrt{3}\sin(x)\right) = 0 \\
&\iff 2\cos\left(5x + \frac{\pi}{4}\right) - 2\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0 \\
&\iff -4\sin\left(3x - \frac{\pi}{24}\right)\sin\left(2x + \frac{7\pi}{24}\right) = 0 \\
&\iff \sin\left(3x - \frac{\pi}{24}\right) = 0 \text{ ou } \sin\left(2x + \frac{7\pi}{24}\right) = 0 \\
&\iff 3x - \frac{\pi}{24} \equiv 0 \pmod{\pi} \text{ ou } 2x + \frac{7\pi}{24} \equiv 0 \pmod{\pi} \\
&\iff x \equiv \frac{\pi}{72} \pmod{\frac{\pi}{3}} \text{ ou } x \equiv \frac{-7\pi}{48} \pmod{\frac{\pi}{2}}
\end{aligned}$$

On en déduit directement le résultat.

$$\mathscr{S}_{\mathbb{R}} = \left\{\frac{\pi}{72} + k\frac{\pi}{3} : k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{-7\pi}{48} + k\frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\right\},$$

$$\mathscr{S}_{]-\pi,\pi]} = \left\{\frac{-71\pi}{72}, \frac{-47\pi}{72}, \frac{-23\pi}{72}, \frac{\pi}{72}, \frac{25\pi}{72}, \frac{49\pi}{72}, \frac{-31\pi}{48}, \frac{-7\pi}{48}, \frac{17\pi}{48}, \frac{41\pi}{48}\right\}.$$

vi. On utilise une formule de transformation de somme en produit.

$$\begin{aligned}
\cos x + \cos 7x = \cos 3x &\iff 2\cos 4x \cos 3x = \cos 3x \\
&\iff \cos 3x = 0 \text{ ou } \cos 4x = \frac{1}{2} \\
&\iff x \equiv \frac{\pi}{6} \pmod{\frac{\pi}{3}} \text{ ou } x \equiv \frac{\pi}{12} \pmod{\frac{\pi}{2}} \text{ ou } x \equiv \frac{-\pi}{12} \pmod{\frac{\pi}{2}}.
\end{aligned}$$

Dans $]-\pi,\pi]$ les solutions sont :

$$-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6},$$

puis

$$-\frac{11\pi}{12}, -\frac{5\pi}{12}, \frac{\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}$$

et enfin

$$-\frac{7\pi}{12}, -\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}.$$

vii.

$$\begin{aligned}
\cos x - \cos 2x = \sin 3x &\iff 2\sin\frac{3x}{2}\sin\frac{x}{2} = 2\sin\frac{3x}{2}\cos\frac{3x}{2}\\
&\iff \sin\frac{3x}{2}\left(\cos\frac{3x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right) = 0\\
&\iff \sin\frac{3x}{2}\left(\cos\frac{3x}{2} + \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{x}{2}\right)\right) = 0\\
&\iff \sin\frac{3x}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) = 0\\
&\iff \sin\frac{3x}{2} = 0 \text{ ou } \cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = 0 \text{ ou } \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) = 0\\
&\iff x \equiv 0 \pmod{\frac{2\pi}{3}} \text{ ou } x \equiv \frac{\pi}{4} \pmod{\pi} \text{ ou } x \equiv -\frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}.
\end{aligned}$$

Dans $]-\pi,\pi]$: $\frac{-2\pi}{3}$, 0, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{\pi}{4}$, $-\frac{\pi}{2}$, $-\frac{3\pi}{4}$.

viii. Soit $x \in \mathbb{R}$. On commence par utiliser la formule de duplication du cosinus : ainsi l'inéquation s'écrit $2\cos^2(x) - 9\cos(x) + 4 > 0$. On pose alors $X = \cos(x)$; on se ramène ainsi à l'étude du signe d'un trinôme du second degré :

$$2\cos^2(x) - 9\cos(x) + 4 > 0 \iff 2X^2 - 9X + 4 > 0.$$

Le discriminant de ce trinôme est $\Delta = 49$ et ses racines sont 4 et $\frac{1}{2}$. On en déduit directement le tableau de signe du trinôme. On aurait aussi pu le retrouver en écrivant $2X^2 - 9X + 4 = 2\left((X-4)\left(X - \frac{1}{2}\right)\right.$. On en déduit alors :

$$\begin{aligned}
2\cos^2(x) - 9\cos(x) + 4 > 0 &\iff \cos(x) < \frac{1}{2} \text{ ou } \cos(x) > 4\\
&\iff \cos(x) < \frac{1}{2} && \text{car } \cos(x) > 4 \text{ n'a pas de solutions}\\
&\iff \exists k \in \mathbb{Z},\ \frac{\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{5\pi}{3} + 2k\pi
\end{aligned}$$

Pour se convaincre de la dernière équivalence, on peut tracer un cercle trigonométrique. On en déduit le résultat :

$$\mathscr{S}_{\mathbb{R}} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{5\pi}{3} + 2k\pi\right[\text{ et } \mathscr{S}_{]-\pi,\pi]} = \left]-\pi, \frac{-\pi}{3}\right[\cup \left]\frac{\pi}{3}, \pi\right].$$

□

Exercice 31.

Soient x, y des réels. Montrer que l'on a :

$$\cos(x+y)\cos(x-y) = \cos^2(x) - \sin^2(y) = \cos^2(y) - \sin^2(x).$$

Et si $\tan(x)$ et $\tan(y)$ sont bien définies, montrer

$$\cos(x+y)\cos(x-y) = \frac{1 - \tan^2(x)\tan^2(y)}{(1+\tan^2(x))(1+\tan^2(y))}.$$

Solution. On a déjà

$$\begin{aligned}
\cos(x+y)\cos(x-y) &= (\cos x\cos y - \sin x\sin y)(\cos x\cos y + \sin x\sin y)\\
&= \cos^2 x - \sin^2 y.
\end{aligned}$$

Et comme x, y ont des rôles symétriques dans l'expression $\cos(x+y)\cos(x-y)$ (car le cosinus est pair), on en déduit $\cos(x+y)\cos(x-y) = \cos^2 y - \sin^2 x$.

Pour obtenir la seconde formule, il suffit de multiplier numérateur et dénominateur de $\dfrac{1-\tan^2(x)\tan^2(y)}{(1+\tan^2 x)(1+\tan^2 y)}$ par $\cos^2 x \cos^2 y$. □

Exercice 32.

1. Résoudre $(E) : \sin(4x) - \sin(x) = 0$.

2. Déterminer un polynôme P tel que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin(4x) - \sin(x) = \sin(x)\, P\left(\cos(x)\right).$$

3. Calculer les racines de P et en déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$.

Solution.

1. On a déjà
$$(E) \iff 2\sin\frac{3}{2}x\cos\frac{5}{2}x = 0 \iff \begin{cases} x = 0 \quad \left[\frac{2\pi}{3}\right] \\ \text{ou} \\ x = \frac{\pi}{5} \quad \left[\frac{2\pi}{5}\right] \end{cases}$$
en utilisant les formules de transformation de somme en produit.

2. Par duplication :
$$\sin 4x - \sin x = 2\sin 2x \cos 2x - \sin x = 4\sin x\cos x\left(2\cos^2 x - 1\right) - \sin x = \sin(x)\cdot P\left(\cos x\right)$$
avec $P\left(X\right) = 8X^3 - 4X - 1$.

3. P admet $-\dfrac{1}{2}$ comme racine, ce qui était prévisible car $x = \dfrac{2\pi}{3}$ est solution de (E) et $\cos\dfrac{2\pi}{3} = -\dfrac{1}{2}$. En factorisant P on obtient les deux autres racines, qui sont $\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{4}$.
Puisque $\dfrac{\pi}{5}$ est solution de (E) et que $\sin\dfrac{\pi}{5} \neq 0$, on en déduit que $\cos\dfrac{\pi}{5}$ est une racine de P. Comme de plus $0 \leqslant \dfrac{\pi}{5} \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, il s'agit d'une racine positive. Comme P n'a qu'une racine positive, on en tire $\cos\dfrac{\pi}{5} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$, puis $\cos\dfrac{2\pi}{5} = 2\cos^2\dfrac{\pi}{5} - 1 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$.

□

Exercice 33.
Exprimer $\cos(7\theta)$ à l'aide de $\cos(\theta)$, pour $\theta \in \mathbb{R}$.

Solution. $\cos 7\theta$ est la partie réelle de $e^{7i\theta} = \left(e^{i\theta}\right)^7 = (\cos\theta + i\sin\theta)^7$. Il suffit de développer cela par la formule du binôme et d'en extraire la partie réelle, que l'on exprime en fonction de $\cos\theta$ seul.
On trouve $\cos 7\theta = 64\cos^7\theta - 112\cos^5\theta + 56\cos^3\theta - 7\cos\theta$. □

Exercice 34.
Linéariser $\sin^3(x)\cos^4(x)$.

Solution. On trouve $\sin^3(x)\cos^4(x) = -\dfrac{1}{64}\left(\sin(7x) + \sin(5x) - 3\sin(3x) - 3\sin(x)\right)$ en appliquant la méthode vue en cours (formule d'Euler puis binôme de Newton avant de regrouper les termes deux-à-deux conjugués). □

Exercice 35.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} 3^k \sin^3\left(\frac{\pi}{3^{k+1}}\right).$$

1. a. Soit $x \in \mathbb{R}$. Exprimer $\sin(3x)$ en fonction de $\sin(x)$, puis en déduire une expression de $\sin^3(x)$ en fonction de $\sin(3x)$ et de $\sin(x)$.

b. En utilisant la question précédente, montrer $S_n = \dfrac{3^n}{4}\sin\left(\dfrac{\pi}{3^n}\right)$.

2. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

Solution.

1. On a :

$$\begin{aligned}\sin(3x) = \sin(2x+x) &= \sin(2x)\cos(x) + \cos(2x)\sin(x)\\ &= 2\sin(x)\cos^2(x) + (1-2\sin^2(x))\sin(x)\\ &= 2\sin(x)(1-\sin^2(x)) + \sin(x) - 2\sin^3(x)\\ &= 3\sin(x) - 4\sin^3(x)\end{aligned}$$

On en déduit le résultat : $\sin^3(x) = \dfrac{3}{4}\sin(x) - \dfrac{1}{4}\sin(3x)$.

2. On commence par utiliser la question précédente qui permet de reconnaitre une somme téléscopique:

$$\begin{aligned}S_n &= \sum_{k=0}^{n-1} 3^k \sin^3\left(\frac{\pi}{3^{k+1}}\right)\\ &= \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{n-1}\left(3^{k+1}\sin\left(\frac{\pi}{3^{k+1}}\right) - 3^k\sin\left(\frac{\pi}{3^k}\right)\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(3^n\sin\left(\frac{\pi}{3^n}\right) - \sin(\pi)\right)\\ &= \frac{3^n}{4}\sin\left(\frac{\pi}{3^n}\right).\end{aligned}$$

3. On a $\sin x \underset{x\to 0}{\sim} x$, donc ici:

$$S_n = \frac{3^n}{4}\sin\left(\frac{\pi}{3^n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{3^n}{4}\times\frac{\pi}{3^n} = \frac{\pi}{4} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{4}.$$

□

6.3 Polynômes

Exercice 36.
Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ les polynômes suivants.

(i) $X^3 - 6X^2 + 11X - 6$ (ii) $X^4 + X^2 + 1$ (iii) $X^6 + X^3 + 1$
(iv) $(3X-1)^5 - (X+2)^5$ (v) $X^3 + 8i$ (vi) $X^4 - \sqrt{2} + i\sqrt{2}$

Solution.

i. On commence par remarquer que 1 est racine évidente. La division euclidienne de $X^3 - 6X^2 + 11X - 6$ par $X - 1$ donne alors $X^3 - 6X^2 + 11X - 6 = (X-1)\left(X^2 - 5X + 6\right)$. Le calcul du discriminant fournit alors la forme factorisée : $(X-1)(X-2)(X-3)$.

ii. On a déjà $y^2 + y + 1 = \left(y - e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)\left(y - e^{\frac{4i\pi}{3}}\right)$, soit en calculant le discriminant, soit en utilisant la relation $y^3 - 1 = (y-1)(y^2+y+1)$ et en utilisant les racines cubiques de l'unité $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et $j^2 = e^{\frac{4i\pi}{3}}$. On peut alors écrire, en utilisant l'identité remarquable $x^2 - a^2 = (x-a)(x+a)$:

$$X^4 + X^2 + 1 = \left(X^2 - e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)\left(X^2 - e^{\frac{4i\pi}{3}}\right) = \left(X - e^{\frac{i\pi}{3}}\right)\left(X + e^{\frac{i\pi}{3}}\right)\left(X - e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)\left(X + e^{\frac{2i\pi}{3}}\right).$$

iii. On raisonne comme ci-dessus, mais cette fois on remplace y par X^3. On utilise également le fait que si a est une racine cubique de z, alors les deux autres sont $j \times a$ et $j^2 \times a$:

$$\begin{aligned} X^6 + X^3 + 1 &= \left(X^3 - e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)\left(X^3 - e^{\frac{4i\pi}{3}}\right) \\ &= \left(X - e^{\frac{2i\pi}{9}}\right)\left(X - e^{\frac{8i\pi}{9}}\right)\left(X - e^{\frac{14i\pi}{9}}\right)\left(X - e^{\frac{4i\pi}{9}}\right)\left(X - e^{\frac{10i\pi}{9}}\right)\left(X - e^{\frac{16i\pi}{9}}\right) \end{aligned}$$

iv. Soit $x \in \mathbb{C}$ On commence par remarquer que $x = -2$ n'est pas racine de $(3x-1)^5 - (x+2)^5 = 0$, à partir de quoi on peut écrire :

$$\begin{aligned} (3x-1)^5 - (x+2)^5 = 0 &\iff \left(\frac{3x-1}{x+2}\right)^5 = 1 \\ &\iff \frac{3x-1}{x+2} \in \mathbb{U}_5 \\ &\iff \exists k \in [\![0,4]\!],\ \frac{3x-1}{x+2} = e^{\frac{2ik\pi}{5}} \\ &\iff \exists k \in [\![0,4]\!],\ x = \frac{2e^{\frac{2ik\pi}{5}} + 1}{3 - e^{\frac{2ik\pi}{5}}} \end{aligned}$$

On en déduit la forme factorisée du polynôme, en n'oubliant pas que celui-ci possède $3^5 - 1$ comme terme dominant :

$$(3X-1)^5 - (X+2)^5 = (3^5 - 1)\prod_{k=0}^{4}\left(X - \frac{2e^{\frac{2ik\pi}{5}} + 1}{3 - e^{\frac{2ik\pi}{5}}}\right).$$

v. Déjà $z^3 + 8i = 0 \iff z^3 = -8i$. Or $-8i = 2^3 e^{-i\frac{\pi}{2}}$ admet $2e^{-i\frac{\pi}{6}}$ pour racine cubique évidente. On obtient les autres racines cubiques en multipliant par les racines cubiques de l'unité, d'où la factorisation :

$$X^3 + 8i = \left(X - 2e^{-i\frac{\pi}{6}}\right)\left(X - 2e^{i\frac{\pi}{2}}\right)\left(X - 2e^{7i\frac{\pi}{6}}\right).$$

vi. Déjà $z^4 - \sqrt{2} + i\sqrt{2} = 0 \iff z^4 = 2e^{-i\frac{\pi}{4}}$. Or $2e^{-i\frac{\pi}{4}}$ admet $\sqrt[4]{2}e^{-i\frac{\pi}{16}}$ pour racine quatrième évidente. On obtient les autres racines quatrièmes en multipliant par les racines quatrièmes de l'unité, d'où la factorisation :

$$X^4 - \sqrt{2} + i\sqrt{2} = \left(X - \sqrt[4]{2}e^{-i\frac{\pi}{16}}\right)\left(X - \sqrt[4]{2}e^{i\frac{7\pi}{16}}\right)\left(X - \sqrt[4]{2}e^{i\frac{15\pi}{16}}\right)\left(X - \sqrt[4]{2}e^{i\frac{23\pi}{16}}\right).$$

□

Exercice 37.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer l'ordre de multiplicité de 2 comme racine du polynôme

$$P(X) = nX^{n+2} - (4n+1)X^{n+1} + 4(n+1)X^n - 4X^{n-1}.$$

Solution. Après calculs on trouve $P(2) = P'(2) = 0$ et $P''(2) \neq 0$ donc 2 est racine de multiplicité 2. □

Exercice 38.

Montrer que le polynôme P divise Q dans chacun des cas suivants.

1. $Q = nX^{n+2} - (n+2)X^{n+1} + (n+2)X - n$ et $P = (X-1)^3$, avec $n \in \mathbb{N}^*$.
2. $Q = (X-1)^{n+2} + X^{2n+1}$ et $P = X^2 - X + 1$, avec $n \in \mathbb{N}$.
3. $Q = X^{3n+2} + X^{3p+1} + X^{3q}$ et $P = X^2 + X + 1$, avec $n, p, q \in \mathbb{N}$.

Solution.

i. Il suffit de prouver que 1 est racine de multiplicité au moins 3 de Q, ce qui se fait en montrant $Q(1) = Q'(1) = Q''(1) = 0$.

ii. P admet pour racines $z, \overline{z}$ où $z = e^{\frac{i\pi}{3}}$. Il suffit donc de prouver $Q(z) = Q(\overline{z}) = 0$, et comme $Q \in \mathbb{R}[X]$, il suffit d'établir $Q(z) = 0$. Considérant que $z - 1 = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ (il suffit de faire le calcul en utilisant les parties réelles et imaginaires), on peut écrire:

$$Q(z) = \left(e^{\frac{i2\pi}{3}}\right)^{n+2} + \left(e^{\frac{i\pi}{3}}\right)^{2n+1} = e^{\frac{i(2n+1)\pi}{3}} \left(e^{i\pi} + 1\right) = 0.$$

D'où le résultat.

iii. P admet pour racines $j, \overline{j}$ où $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Il suffit donc de prouver $Q(j) = Q(\overline{j}) = 0$, et comme $Q \in \mathbb{R}[X]$, il suffit d'établir $Q(j) = 0$. Or j est une racine cubique de l'unité, elle vérifie donc $j^3 = 1$ et $1 + j + j^2) = 0$, ce qui permet d'écrire:

$$Q(j) = j^{3n+2} + j^{3p+1} + j^{3q} = j + j^2 + 1 = 0.$$

D'où le résultat.

□

Exercice 39.

Soit $P = X^2 - 2X\cos(\theta) + 1$ et $Q_n = X^n \sin(\theta) - X\sin(n\theta) + \sin((n-1)\theta)$, pour $n \geqslant 2$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que P divise Q_n.

2. Déterminer le quotient dans la division euclidienne de Q_n par P.

Solution.

1. P admet pour racines $e^{i\theta}, e^{-i\theta}$ avec une multiplicité 1; il suffit donc de prouver $Q_n(e^{i\theta}) = Q_n(e^{-i\theta}) = 0$. Et comme $Q_n \in \mathbb{R}[X]$, il suffit d'établir $Q_n(e^{i\theta}) = 0$. Pour cela, on peut séparer parties réelle et imaginaire, puis utiliser une formule d'addition:

$$\begin{aligned} Q_n(e^{i\theta}) &= (\cos(n\theta)\sin\theta - \cos\theta\sin(n\theta) + \sin((n-1)\theta)) + i\,(\sin(n\theta)\sin\theta - \sin\theta\sin(n\theta)) \\ &= (\sin(-n\theta + \theta) + \sin((n-1)\theta)) + 0i \\ &= 0 \end{aligned}$$

2. Il suffit d'effectuer les deux premières étapes dans la division euclidienne pour conjecturer que le quotient est

$$Q(X) = \sum_{k=0}^{n-2} X^k \sin((n-1-k)\theta),$$

ce que l'on démontre aisément ensuite en développant $Q \times P$, ce qui permet de retrouver Q_n.

□

Exercice 40. **Polynômes de Tchebychev**

Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de polynômes définie par:

$$T_0(X) = 1,\ T_1(X) = 2X \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ T_{n+2}(X) = 2XT_{n+1}(X) - T_n(X).$$

1. Calculer $T_2(X)$ et $T_3(X)$.

2. Montrer $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R},\ \sin((n+1)x) = \sin(x)T_n(\cos(x))$.

Solution.

1. $T_2(X) = 4X^2 - 1$ et $T_3(X) = 8X^3 - 4X$.

2. On raisonne par récurrence double sur $n \in \mathbb{N}$.

✗ Initialisation. La propriété se vérifie aisément en $n = 0$ et $n = 1$.

✗ Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que que la propriété est vérifiée aux rangs n et $n+1$. On peut alors écrire:

$$\begin{aligned} \sin(x)T_{n+2}(\cos(x)) &= 2\sin(x)\cos(x)T_{n+1}(\cos(x)) - \sin(x)T_n(\cos(x)) \\ &= 2\cos(x)\sin((n+2)x) - \sin((n+1)x) \qquad \text{par hypothèse de réc.} \\ &= \sin((n+3)x) + \sin((n+1)x) - \sin((n+1)x) \qquad \text{par transformation somme/produit} \end{aligned}$$

D'où la propriété au rang $n+2$ et par suite le résultat.

□

Exercice 41. **Oral Math II 2024**

Soit un entier $q \geq 2$. On pose $Q(X) = qX^q - \sum_{k=0}^{q-1} X^k \in \mathbb{C}[X]$ et $R = (X-1)Q$.

1. Montrer que 1 est racine de Q.
2. Montrer que si z est racine de Q alors $q|z|^q \leq \sum_{k=0}^{q-1} |z|^k$ et $|z| \leq 1$.
3. Montrer que $R(X) = qX^{q+1} - (q+1)X^q + 1$.
4. Montrer que 1 est racine double de R et que les autres racines de R sont simples.
5. En déduire que Q n'admet que des racines simples.

Solution.

1. $Q(1) = q - q \times 1 = 0$ donc 1 est racine de Q.
2. Si z est racine de Q alors $qz^q = \sum_{k=0}^{q-1} z^k$.

   Par inégalité triangulaire, $q|z|^q \leq \sum_{k=0}^{q-1} |z|^k$.

   Si $|z| > 1$ alors $|z|^k < |z|^q$ et donc
   $$\sum_{k=0}^{q-1} |z|^k < \sum_{k=0}^{q-1} |z|^q = q|z|^q$$
   ce qui est contradictoire avec l'inégalité précédente. Donc $|z| \leq 1$.
3. On fait apparaître in télescopage :
   $$\begin{aligned} R(X) = (X-1)Q(X) &= qX^{q+1} - qX^q - \sum_{k=0}^{q-1} X^{k+1} + \sum_{k=0}^{q-1} X^k \\ &= qX^{q+1} - qX^q - \sum_{k=1}^{q} X^k + \sum_{k=0}^{q-1} X^k = qxXq + 1 - (q+1)X^q + 1 \end{aligned}$$
4. $R(1) = q-(q+1)+1 = 0$, $R'(X) = q(q+1)X^q - q(q+1)X^{q-1}$ et $R'(1) = 0$ puis $R''(X) = q^2(q+1)X^{q-1} - q(q-1)(q+1)X^{q-2}$ donc $R''(1) = q^2(q+1) - q(q-1)(q+1) \neq 0$ car $q \in \mathbb{N}$ et $q \geqslant 2$.
   Donc 1 est racine double de R.
   $R'(X) = q(q+1)X^{q-1}(X-1)$ ne s'annule qu'en 0 et 1 ; $R(0) = 1 \neq 0$ donc les autres racines de R' n'annulent pas R' : elles sont simples.
5. $R = (X-1)^2 T$ où T n'a que des racines simples distinctes de 1 donc $Q = \frac{R}{X-1} = (X-1)T$ qui n'a que des racines simples.

$\square$

Exercice 42. **Oral Math II 2017**

Soit n un entier naturel impair et P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ ayant la propriété $(\mathscr{P})$ suivante :
$$(X^n + 1)P(X) = P(X^2).$$

1. Dire si le polynôme $X^n - 1$ vérifie la propriété $(\mathscr{P})$.
2. Déterminer le degré du polynôme P.
3. Soit ω une racine n-ième de -1. Montrer que $-\omega$ est racine de P.
4. Quels sont les polynômes vérifiant la propriété $(\mathscr{P})$?

Solution.

1. On a d'une part $(X^n + 1)(X^n - 1) = X^{2n} - 1$ et $P(X^2) = (X^2)^n - 1 = X^{2n} - 1$, d'autre part. Donc, $X^n - 1$ vérifie la propriété $(\mathscr{P})$.
2. Le polynôme nul vérifie clairement la propriété $\mathscr{P}$. Soit donc P un polynôme non nul vérifiant la propriété $\mathscr{P}$ et soit d son degré. On a :
   $$\deg((X^n + 1)P(X)) = \deg(P(X^2))$$

Donc,
$$n+d=2d$$
ce qui donne
$$d=n$$
Le degré du polynôme P est donc n.

3. Soit ω une racine n-ième de -1, c'est-à-dire $\omega^n=-1$. En utilisant la propriété $\mathscr{P}$, on a :
$$(X^n+1)P(X)=P(X^2)$$
En évaluant l'identité précédente en ω, on obtient :
$$(\omega^n+1)P(\omega)=P(\omega^2)$$
Comme $\omega^n=-1$, on a $P(\omega^2)=0$. En évaluant maintenant l'identité précédente en $-\omega$, on obtient :
$$((-\omega)^n+1)\,P(-\omega)=P(\omega^2)$$
Compte tenu de l'imparité de n, $(-\omega)^n=(-1)^n\omega^n=-(-1)=1$, ce qui, avec la relation précédente, donne:
$$2P(-\omega)=P(\omega^2)=0$$
Ainsi, $-\omega$ est racine de P.

4. On vient de voir que les opposées des n racines n-ième de -1 sont racines de P. Comme celui-ci est de degré n, il n'en admet pas d'autres. En remarquant que ω est racine n-ième de -1 si et seulement si ω est racine n-ième de 1, on déduit que le racines de P sont exactement les racines n-ième de 1; par conséquent, les polynômes vérifiant la propriété $(\mathscr{P})$ sont de la forme :
$$P(X)=c\prod_{k=0}^{n-1}\left(X-\exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right)\right)=c(X^n-1)$$
où c est une constante réelle arbitraire.

□

Exercice 43. **Oral Math II 2019**

Soient a, b et c trois nombres complexe, de module 1 vérifiant $a+b+c=1$.

1. Montrer que : $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=1$.

2. Soit $P\in\mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré 3 de racines a,b,c.
Montrer qu' une des trois racines vaut 1 et déterminer les deux autres.

Solution.

1. On rappelle que si a est un complexe de module 1 , alors $\bar{a}=a^{-1}$. En effet, on a $a=1\cdot e^{i\theta}$ donc $\bar{a}=e^{-i\theta}=a^{-1}$. Pour obtenir le résultat, il suffit donc de conjuguer l'égalité $a+b+c=1$.

2. Comme P est à coefficients réels, on sait que ses racines complexes sont deux à deux conjuguées.
Donc P ne peut avoir qu'un nombre pair de racines complexes non réelles, (comptées avec multiplicité ou pas), ce qui prouve que l'un (au moins) des complexes a,b,c est réel et que les deux autres sont conjugués. Supposons par exemple que c'est c (les trois jouent des rôles symétriques de toute façon). Comme $|c|=1$, on a donc $c=\pm1$, et il nous faut ainsi distinguer deux cas :
- ✗ Si $c=1$, la relation $a+b+c=1$ donne $a+b=0$ soit $a+\bar{a}=0$. On en déduit $a\in i\mathbb{R}$, soit $a=ix$ avec $x\in\mathbb{R}$. Et comme $|a|=1$ on en déduit $(a,b)=(i,-i)$ ou $(a,b)=(-i,i)$.
- ✗ Si $c=-1$, la relation $a+b+c=1$ donne $a+b=2$ soit $a+\bar{a}=2\operatorname{Re}(a)=2$. On en déduit $a=1+ix$ avec $x\in\mathbb{R}$. Et comme $|a|=1$ on en déduit $(a,b)=(1,1)$.

Finalement, on obtient $\{a,b,c\}=\{1,-i,i\}$ ou $\{a,b,c\}=\{-1,1,1\}$.

□

6.4 Nombres complexes, racines de l'unité

Exercice 44.

Soient $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 2$ et $\omega=e^{\frac{2i\pi}{n}}$.

1. Établir que pour tout $z\in\mathbb{C},z\neq1$, on a : $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}(z-\omega^k)=\sum_{i=0}^{n-1}z^i$.

2. Justifier que l'égalité reste valable pour $z = 1$.
3. En déduire l'égalité $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}$.

Solution.
1. Par le cours on a $\mathbb{U}_n = \{\omega^k;\ k \in [\![0, n-1]\!]\}$ et pour tout $z \in \mathbb{C}$:
$$z^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} (z - \omega^k) = (z-1) \prod_{k=1}^{n-1} (z - \omega^k) \text{ et } z^n - 1 = (z-1) \sum_{i=0}^{n-1} z^i.$$
En simplifiant par $z - 1$ (ce qui implique $z \neq 1$) on en déduit le résultat.

2. Soit $P(z) = \displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} (z - \omega^k) - \sum_{i=0}^{n-1} z^i$. On a prouvé $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{1\},\ P(z) = 0$, donc P est un polynôme possèdant une infinité de racines. On en déduit $\forall z \in \mathbb{C},\ P(z) = 0$, d'où le résultat.

3. Soit $P = \displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n}$. En prenant $z = 1$ dans l'égalité $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} z^i = \prod_{k=1}^{n-1} (z - \omega^k)$ il vient:
$$\begin{aligned} n &= \prod_{k=1}^{n-1} (1 - e^{2ik\pi/n}) \\ &= \prod_{k=1}^{n-1} e^{ik\pi/n}(e^{-ik\pi/n} - e^{ik\pi/n}) \qquad \text{par mise en facteur de l'arc moyen} \\ &= \prod_{k=1}^{n-1} e^{ik\pi/n}(-2i \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)) \\ &= (-2i)^{n-1} e^{\frac{i\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1} k} \times P \end{aligned}$$
Or
$$(-2i)^{n-1} e^{\frac{i\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1} k} = (-1)^{n-1} 2^{n-1} i^{n-1} e^{\frac{i\pi(n-1)}{2}} = (-1)^{n-1} 2^{n-1} e^{i\pi(n-1)} = 2^{n-1}.$$
D'où le résultat.

□

Exercice 45.
On pose $z = \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)$.
1. On pose $S = z + z^2 + z^4$ et $T = z^3 + z^5 + z^6$. Montrer que S et T sont conjugués, et que la partie imaginaire de S est positive.
2. Calculer $S + T$ et ST, puis en déduire S et T.

Solution. On remarque déjà que $z = e^{2i\pi/7} \in \mathbb{U}_7$.

1. On a
$$\overline{S} = e^{-2i\pi/7} + e^{-4i\pi/7} + e^{-8i\pi/7} = e^{12i\pi/7} + e^{10i\pi/7} + e^{6i\pi/7} = T.$$
Par ailleurs:
$$\mathrm{Im}(S) = \sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7} + \sin\frac{8\pi}{7} = \sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7} - \sin\frac{\pi}{7}.$$
Or $\sin\frac{\pi}{7}, \sin\frac{2\pi}{7}, \sin\frac{4\pi}{7} > 0$ et $\sin\frac{2\pi}{7} - \sin\frac{\pi}{7} > 0$ car sin est strictement croissant sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. D'où $\mathrm{Im}(S) > 0$.

2. On a déjà $S + T = \displaystyle\sum_{k=1}^{6} z^k = \sum_{k=0}^{6} z^k - 1 = -1$ car la somme des racines 7-èmes de l'unité est nulle.

De même comme $z^7 = 1$ on a $S \cdot T = \displaystyle\sum_{k=0}^{6} z^k + 2 = 2$.

On en déduit que S, T sont racines de $X^2 + X + 2$ (par les relations coefficients-racines), et que S est la racine de partie imaginaire strictement positive. D'où $S = \dfrac{-1 + i\sqrt{7}}{2}$ et $T = \dfrac{-1 - i\sqrt{7}}{2}$.

□

Exercice 46.
On considère l'équation $(z+1)^5 = (z-1)^5$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

1. Résoudre cette équation en développant.
2. Résoudre cette même équation en utilisant les racines cinquièmes de l'unité.
3. En comparant les deux résultats obtenus, déterminer une valeur exacte de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$.

Solution.

1. On a :

$$(z+1)^5 - (z-1)^5 = 0.$$

Utilisons la formule du binôme de Newton :

$$(z+1)^5 = \sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} z^{5-k} \cdot 1^k = z^5 + 5z^4 + 10z^3 + 10z^2 + 5z + 1,$$

$$(z-1)^5 = \sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} z^{5-k} \cdot (-1)^k = z^5 - 5z^4 + 10z^3 - 10z^2 + 5z - 1.$$

Donc :

$$(z+1)^5 - (z-1)^5 = 2(5z^4 + 10z^2 + 1).$$

On obtient :

$$2(5z^4 + 10z^2 + 1) = 0 \iff 5z^4 + 10z^2 + 1 = 0.$$

Posons $u = z^2$, alors :

$$5u^2 + 10u + 1 = 0.$$

Résolvons cette équation quadratique :

$$u = \frac{-10 \pm \sqrt{100-20}}{10} = \frac{-10 \pm \sqrt{80}}{10} = \frac{-10 \pm 4\sqrt{5}}{10} = \frac{-5 \pm 2\sqrt{5}}{5}.$$

Donc :

$$z^2 = \frac{-5 \pm 2\sqrt{5}}{5} \iff z = \pm i\sqrt{\frac{5 \pm 2\sqrt{5}}{5}}.$$

2. Comme $z = 1$ n'est clairement pas solution de l'équation, $z - 1 \neq 0$ et on peut diviser.

$$\begin{aligned}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^5 = 1 &\iff \frac{z+1}{z-1} = e^{(2ik\pi)/5} \iff \exists k \in [\![0,4]\!],\ z+1 = e^{(2ik\pi)/5}(z-1) \\ &\iff \exists k \in [\![1,4]\!],\ z\left(e^{(2ik\pi)/5} - 1\right) = 1 + e^{(2ik\pi)/5} \\ &\iff \exists k \in [\![1,4]\!],\ z = \frac{1+e^{(2ik\pi)/5}}{e^{(2ik\pi)/5}-1} = -i\frac{\cos\left(\frac{k\pi}{5}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{5}\right)} = -\frac{i}{\tan\left(\frac{k\pi}{5}\right)}\end{aligned}$$

Sachant que la tangente est croissante sur chacun de ses intervalles de définition, et que les valeurs de $\tan\left(\frac{3\pi}{5}\right)$ et $\tan\left(\frac{4\pi}{5}\right)$ sont négatives, on peut effectuer l'identification suivante : $\frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{5}\right)} = \sqrt{1+\frac{2\sqrt{5}}{5}}$; $\frac{1}{\tan\left(\frac{2\pi}{5}\right)} = \sqrt{1-\frac{2\sqrt{5}}{5}}$; $\frac{1}{\tan\left(\frac{3\pi}{5}\right)} = -\sqrt{1-\frac{2\sqrt{5}}{5}}$, et enfin $\frac{1}{\tan\left(\frac{4\pi}{5}\right)} = -\sqrt{1+\frac{2\sqrt{5}}{5}}$. En particulier, on aura $\tan^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{5}{5-2\sqrt{5}}$, donc $\frac{1}{\cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right)} = 1 + \tan^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{10-2\sqrt{5}}{5-2\sqrt{5}}$, et $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{10-2\sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{(5-2\sqrt{5})(10+2\sqrt{5})}{100-20}} = \sqrt{\frac{30-10\sqrt{5}}{80}} = \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{8}}$. De façon tout à fait similaire, $\tan^2\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \frac{5}{5+2\sqrt{5}}$, donc $\frac{1}{\cos^2\left(\frac{4\pi}{5}\right)} = \frac{10+2\sqrt{5}}{5+2\sqrt{5}}$, et $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = -\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{10+2\sqrt{5}}} = -\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8}}$.

□

6.5 Suites

Exercice 47.

Étudier la suite (u_n) définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n^2}$.

***Solution*.** Une récurrence immédiate montre que tous les termes sont strictement positifs. On peut alors voir que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{1+u_n^2} < 1$$

et (u_n) est décroissante. Par théorème de convergence monotone (décroissante et minorée par 0), la suite est convergente vers $\ell \geq 0$ qui vérifie

$$\ell = \frac{\ell}{1+\ell^2} \iff 1+\ell^2 = 1 \iff \ell = 0.$$

□

Exercice 48.

Soit (u_n) une suite réelle qui converge vers un réel $\ell \neq 0$. Montrer que $u_{n+1} \sim u_n$. Est-ce toujours vrai si $\ell = 0$?

***Solution*.** Comme $\ell \neq 0$, on peut écrire

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\ell}{\ell} = 1,$$

et donc $u_{n+1} \sim u_n$. Le résultat n'est naturellement plus vrai si $\ell = 0$, par exemple avec $u_n = \exp(-n)$. □

Exercice 49.

En découpant astucieusement la somme, montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} k! \sim n!$$

***Solution*.** Il faut découper en 3 (si on ne sort que le dernier terme, la somme des $n-1$ termes restant se majore par $(n-1)\times(n-1)!$ dont le quotient avec $n!$ ne tend pas vers 0. Il faut donc être un peu plus subtil...)

$$\sum_{k=1}^{n} k! = \sum_{k=1}^{n-2} k! + (n-1)! + n!$$

de sorte que

$$\frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n} k! = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n-2} k!$$

Il ne reste qu'à montrer que

$$\frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n-2} k! = \sum_{k=1}^{n-2} \frac{k!}{n!} \longrightarrow 0.$$

Il est clair que pour tour $k \in [\![1; n-2]\!]$, $k! \leq (n-2)!$ et donc

$$\sum_{k=1}^{n-2} \frac{k!}{n!} \leq \sum_{k=1}^{n-2} \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{n-2}{n(n-1)} \sim \frac{1}{n} \longrightarrow 0.$$

Le théorème des gendarmes permet de conclure que

$$\sum_{k=1}^{n} k! \underset{n\to+\infty}{\sim} n!$$

□

Exercice 50. **Suite implicite, Oral Math II 2015**

Soit $f(x) = \dfrac{x\ln(x)}{1+x}$, considérée sur $[1, +\infty[$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique réel $a_n \geq 1$ tel que $f(a_n) = n$.

2. Étudier les variations de la suite (a_n). Montrer que (a_n) n'est pas bornée.

3. Donner un équivalent b_n de a_n, puis un équivalent de $a_n - b_n$.

Solution.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Pour tout $x \in [1,+\infty[, x > 0$ et $1+x \neq 0$.
Donc f est définie et dérivable sur $[1,+\infty[$, par les théorèmes généraux. Pour $x \geq 1$, on a :

$$f'(x) = \frac{(\ln(x)+1)(1+x) - x\ln(x)}{(1+x)^2} = \frac{1+x+\ln(x)}{(1+x)^2} > 0 \text{ car } \ln(x) \geq 0$$

Donc f est continue et strictement croissante sur $[1,+\infty[$. De plus, on a :

$$f(1) = 0 \quad \text{et} \quad f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x\ln(x)}{x} = \ln(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Donc, par le théorème de la bijection, f réalise une bijection de l'intervalle $[1,+\infty[$ sur l'intervalle $f([1,+\infty[) = [0,+\infty[$ qui contient n.
Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique réel $a_n \geq 1$ tel que $f(a_n) = n$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a : $f(a_{n+1}) = n+1 > n = f(a_n)$ et, toujours par le théorème de la bijection, f^{-1} réalise une bijection continue strictement croissante (comme f) de $[0,+\infty[$ sur $[1,+\infty[$. Donc

$$a_{n+1} = f^{-1}(n+1) > f^{-1}(n) = a_n \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} f^{-1}(n) = +\infty$$

Donc (a_n) est croissante non bornée.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a : $a_n \geq 1$ et $f(a_n) = \frac{a_n \ln(a_n)}{1+a_n} = n$.
Donc $\ln(a_n) = \frac{n(1+a_n)}{a_n}$ et donc $a_n = \mathrm{e}^{n+\frac{n}{a_n}} = \mathrm{e}^n \mathrm{e}^{\frac{n}{a_n}}$. De plus, $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc $\frac{n}{a_n} = \frac{\ln(a_n)}{1+a_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(a_n)}{a_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, par croissance comparée. On en déduit que $\frac{a_n}{\mathrm{e}^n} = \mathrm{e}^{\frac{n}{a_n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^0 = 1$, par composition. Donc $\underset{n\to+\infty}{\sim} b_n = \mathrm{e}^n$.
On a aussi $a_n - b_n = \mathrm{e}^n\left(\mathrm{e}^{\frac{n}{a_n}} - 1\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^n \times \frac{n}{a_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^n \times \frac{n}{\mathrm{e}^n}$. Donc $a_n - b_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n$. Finalement on peut écrire $a_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{e}^n + n + o(n)$ (développement asymptotique).

□

Exercice 51.

Pour tout entier naturel n, on pose

$$u_n = \prod_{k=0}^{n} \left(1 + \frac{1}{2^k}\right).$$

1. Donner, sous forme d'entiers ou de fractions simplifiées, les valeurs de u_0, u_1 et u_2.
2. Montrer que, pour tout entier n, on a $u_n \geq 2$.
3. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n puis en déduire les variations de la suite (u_n).
4. Établir que, pour tout réel x strictement supérieur à -1, on a $\ln(1+x) \leq x$.
5. En déduire que, pour tout entier n, on a

$$1 \leq u_n \leq v_n,$$

où (v_n) est une suite que l'on explicitera et dont on déterminera la limite.
6. Conclure que la suite (u_n) converge vers un élément ℓ de $[2; e^2]$.

Solution.

1. On calcule

$$\begin{aligned} u_0 &= 1 + \frac{1}{2^0} = 1 + 1 = 2 \\ u_1 &= u_0 \times \left(1 + \frac{1}{2}\right) = 2 \times \frac{3}{2} = 3 \\ u_2 &= u_1 \times \left(1 + \frac{1}{2^2}\right) = 3 \times \frac{5}{4} = \frac{15}{4}. \end{aligned}$$

2. L'inégalité se montre facilement par récurrence. On vient de voir que $u_0 = 2$ ce qui permet de l'initialiser. Supposons alors que $u_n \geq 2$ pour un certain $n \geq 0$. En constatant que $\left(1 + \frac{1}{2^k}\right) \geq 1$, on a

$$u_{n+1} = u_n \times \left(1 + \frac{1}{2^k}\right) \geq u_n \geq 2,$$

et la récurrence est bien démontrée.

3. L'inégalité obtenue à la question précédente intègre la preuve que la suite (u_n) est croissante.

4. Inégalité de convexité ou étude de la fonction $x \mapsto \ln(1 + x) - x$.

5. Comme $u_n \geq 2$ pour tout $n \geq 0$, tous les termes sont en particulier strictement positifs et on peut calculer le logarithme de u_n. En combinant les propriétés du log, l'inégalité obtenue à la question précédente ainsi que la formule du calcul d'une somme des termes d'une suite géométrique, on a

$$\ln(u_n) = \ln\left(\prod_{k=0}^{n}\left(1 + \frac{1}{2^k}\right)\right) = \sum_{k=0}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right) \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) =: v_n$$

avec (v_n) qui converge vers 2 (en étant croissante) et qui est donc majorée par 2.

6. On revient à u_n en prenant l'exponentielle dans l'inégalité précédente. Comme de plus, $u_n \geq 2$, on a donc

$$2 \leq u_n \leq \exp(2).$$

Ainsi la suite (u_n) est croissante et majorée par 2. Le théorème de convergence monotone assure donc que la suite est convergente vers une certaine limite ℓ. Par passage à la limite dans l'encadrement ci-dessus, on voit que

$$2 \leq \ell \leq \exp(2) \iff \ell \in [2; e^2].$$

□

Exercice 52. **Extrait cahier de vacances, sujet n°1**

On considère une suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ qu'on suppose croissante et convergente vers un réel ℓ.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $b_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$.

On veut montrer que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge également vers ℓ.

1. **a.** Établir la relation suivante : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ b_{n+1} - b_n = \dfrac{1}{n(n+1)}\left(na_{n+1} - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k\right)$.
   b. En déduire que la suite (b_n) est croissante.
   c. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n \leq \ell$.
   En déduire que (b_n) converge vers un réel ℓ' qui vérifie $\ell' \leq \ell$.
   d. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $2b_{2n} - b_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} a_k$.
   En déduire l'inégalité : $2b_{2n} - b_n \geq a_n$.
   e. Déduire des questions précédentes que $\ell' = \ell$ et qu'ainsi, la suite (b_n) converge vers ℓ.

2. **a.** Écrire une fonction `Python` d'en-tête `def suite_b(a):` qui prend en argument la liste $\mathtt{a} = [a_1, ..., a_n]$ des $n-$ premiers termes de la suite (a_k) et renvoie les n premiers termes de la suite (b_k)
   b. Déterminer quelle valeur (approximative) va s'afficher à l'exécution des commandes suivantes :

```
a = np.array([ 2-1/n**2 for n in range(1,1001) ])
b = suite_b(a)
print(b[999])
```

***Solution*. 1. a.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$b_{n+1} - b_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1} a_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{1}{n(n+1)}\left(n\sum_{k=1}^{n+1} a_k - (n+1)\sum_{k=1}^{n} a_k\right)$$

$$b_{n+1} - b_n = \frac{1}{n(n+1)}\left(na_{n+1} + n\sum_{k=1}^{n} a_k - n\sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_k\right) = \frac{1}{n(n+1)}\left(na_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} a_k\right)$$

Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, b_{n+1} - b_n = \frac{1}{n(n+1)}\left(na_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} a_k\right).$$

b. La relation précédente donne pour tout entier n non nul.

$$\begin{aligned} b_{n+1} - b_n &= \frac{1}{n(n+1)}\left(na_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} a_k\right) \\ &= \frac{1}{n(n+1)}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} a_k\right) \quad \text{en remarquant que } na_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} a_{n+1} \\ &= \frac{1}{n(n+1)}\left(\sum_{k=1}^{n} \underbrace{a_{n+1} - a_k}_{\geq 0}\right) \quad \text{avec } \forall k \in [\![1, n]\!],\ a_{n+1} - a_k \geq 0 \quad \text{car } (a_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est croissante.} \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad b_{n+1} - b_n \geq 0$ donc la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

c. La suite (a_n) est croissante et converge vers ℓ donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad a_n \leq \ell$. On a alors :

$$b_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ell = \ell.$$

Ainsi, la suite (b_n) est majorée par ℓ.
Comme cette suite est croissante, on en déduit d'après le théorème de la limite monotone, qu'elle converge.
Ainsi, la suite (b_n) vers un réel ℓ' qui vérifie $\ell' \leq \ell$ (car $b_n \leq \ell$).

d. On a :

$$2b_{2n} - b_n = 2\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n} a_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{2n} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_k\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{2n} a_k$$

Comme la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante, on a pour tout $k \in [\![n+1, 2n]\!]$, $a_k \geq a_n$, ce qui donne :

$$2b_{2n} - b_n = \frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{2n} a_k \geq \frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{2n} a_n = \frac{1}{n}na_n = a_n$$

Ainsi, pour tout entier n non nul, $2b_{2n} - b_n \geq a_n$.

e. En passant à la limite dans l'inégalité de la question précédente, on obtient :

$$2b_{2n} - b_n \geq a_n \implies 2\ell' - \ell' \geq \ell \implies \ell' \geq \ell$$

Or, on a déjà vu que : $\ell' \leq \ell$, ce qui permet de conclure que $\ell' = \ell$. La suite (b_n) converge vers ℓ.

2. a. On peut utiliser la commande `cumsum( )` mais ce n'est pas obligatoire.

```
def suite_b(a) :
    S = np.cumsum( a )
    b = [ S[i]/(i+1) for i in range(len(S))]
    return b
```

b. La liste `a` dans la première ligne du programme contient les premiers termes de la suite (a_n) avec $a_n = 2 - 1/n^2$ qui converge clairement vers $\ell = 2$.
De plus (a_n) est croissante, le résultat démontré affirme la suite (b_n) converge également vers 2 donc la troisième ligne affichera b_{1000} qui sera une valeur proche de 2 (sa limite).

□