

Semaine de colle n°1

Du Lundi 8 Septembre au Vendredi 12 Septembre
Planche n°1

Question de cours

Calculer, pour $\theta \in \mathbb{R}$ (en discutant éventuellement selon les valeurs de θ), la somme $\sum_{k=0}^n \sin(k\theta)$.

Exercice 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

- i. $\cos(x) = \sqrt{3} \sin(x) + 1$.
- ii. $\cos(x) + \sin(x) = 1 + \tan(x)$.

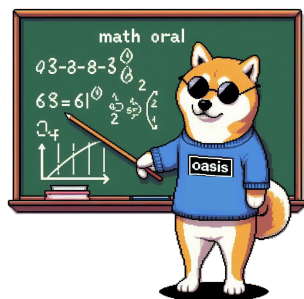
Exercice 2

On pose $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$, racine troisième de l'unité.

1. Calculer les valeurs de j^3 et de $1 + j + j^2$.
2. Calculer successivement, pour $k = 3p$ (avec $p \in \mathbb{N}$), $k = 3p + 1$ et $k = 3p + 2$, la valeur de la somme $S_k = 1 + j^k + (j^2)^k$.
3. Soit P un polynôme à coefficients complexes, de la forme $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$.
Calculer $P(X) + P(jX) + P(j^2X)$, qu'on exprimera en fonction des coefficients de P .
4. a. Soit $\omega \in \mathbb{C}$ fixé. Développer et simplifier le polynôme $R_\omega(X) = (X - \omega)(jX - \omega)(j^2X - \omega)$.
b. Soit le polynôme $Q(X) = (X - 1)(X - 2)(X - 3)(X - 4)$. On lui associe le polynôme $T(X) = Q(X)Q(jX)Q(j^2X)$.
Montrer qu'il existe un polynôme H à expliciter tel que $T(X) = H(Y)$.
c. Déterminer de deux façons différentes les racines de T .

Exercice 3

Écrire une fonction `test_sous_liste` qui prend en argument deux listes `L` et `M` et qui renvoie `-1` si `M` n'est pas une sous-liste de `L` et le plus petit indice i tel que `M` est la sous-liste de `L` commençant à l'indice i sinon.



Semaine de colle n°1

Du Lundi 8 Septembre au Vendredi 12 Septembre
Planche n°1

Question de cours

On définit la suite (S_n) par $S_0 = 0, S_1 = 1, S_{2n} = S_n$ et $S_{2n+1} = S_n + S_{n+1}$.

Écrire une fonction d'en-tête `def L(N) :` qui renvoie la suite des N premiers termes de la suite.

Exercice 1

Calculer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{0 \leq i < j \leq n} \binom{j}{i} 2^i$.

Exercice 2

Pour quelles valeurs de $m \in \mathbb{R}$ l'équation

$$\sqrt{3} \cos(x) - \sin(x) = m$$

admet-elle des solutions? Les déterminer lorsque $m = \sqrt{2}$.

Exercice 3

1. Montrer : $\forall \alpha \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$, $\tan(\alpha) = \frac{1}{\tan(\alpha)} - \frac{2}{\tan(2\alpha)}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dédire de la question précédente la valeur de $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} \tan\left(\frac{\pi}{2^{k+2}}\right)$.



Semaine de colle n°1

Du Lundi 8 Septembre au Vendredi 12 Septembre
Planche n°1

Question de cours

Énoncer et démontrer par récurrence la formule du binôme de Newton.

Exercice 1

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Transformer $\cos(x) + 2\cos(2x) + \cos(3x)$ en produit.
2. Résoudre l'équation $\cos(x) + 2\cos(2x) + \cos(3x) = 0$ d'inconnue $x \in]-\pi, \pi]$.

Exercice 2

Pour tout entier $n \geq 1$, on note $S_n = \sum_{k=1}^n k^2$, et $T_n = \sum_{k=1}^n k^4$.

On introduit également $u_n = \frac{T_n}{S_n}$, et $v_n = 5(u_{n+1} - u_n)$.

1. Donner les valeurs de S_n et T_n pour tous les entiers n inférieurs ou égaux à 5.
2. En déduire les valeurs de u_n et v_n pour tous les entiers n inférieurs ou égaux à 5.
3. Conjecturer quant à l'expression de v_n en fonction de n puis à propos de celle de u_n , et enfin celle de T_n .
4. Démontrer la formule conjecturée par récurrence.

Exercice 3

Soient a, b, c, d dans $[0, \pi]$.

1. Montrer $\sin(a) + \sin(b) \leq 2 \sin\left(\frac{a+b}{2}\right)$. Quand y a-t-il égalité?
2. Montrer $\sin(a) + \sin(b) + \sin(c) + \sin(d) \leq 4 \sin\left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)$.
3. En déduire $\sin(a) + \sin(b) + \sin(c) \leq 3 \sin\left(\frac{a+b+c}{3}\right)$.

Exercice 4

Soit n un entier naturel impair et non multiple de 5.

On **admet** qu'un de ses multiples, noté N , s'écrit en base 10 avec seulement le chiffre 1 (il est de la forme $111 \cdots 111$).

Écrire une fonction **QueDesUns** d'un argument n qui renvoie le premier multiple N de n ne s'écrivant qu'avec des 1, si n est impair non multiple de 5, et **'erreur'** sinon.

PIERRE-ALAIN SALLARD
chez FRÉDÉRIC GAUNARD
Classe de PT – 2024/2025

Semaine 1

Trigonométrie, calcul algébrique ; Racines de l'unité ; Polynômes

Question de cours. Donner et justifier les formules d'addition suivantes :

- $\cos(x + y) = \dots$
- $\sin(x + y) = \dots$
- $\tan(x + y) = \dots$

Exercice 1 Résoudre dans $] -\pi, \pi]$ l'équation $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$.

Exercice 2 Déterminer deux réels a et b pour que 1 soit racine double du polynôme $P = X^5 + aX^2 + bX$.

Une fois cette condition remplie, factoriser ce polynôme dans $\mathbb{R}[X]$.

Éléments de correction

Exercice 1 On établit d'abord que $\sin x + \sin 3x = 2 \sin 2x \cos x$.

D'où $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0 \iff \sin(2x) = 0$ ou $2 \cos(x) + 1 = 0$.

On obtient comme ensemble de solution $\left\{-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \pi\right\}$.

Exercice 2 D'après le cours,

1 est racine double de $P = X^5 + aX^2 + bX \iff P(1) = P'(1) = 0$ et $P''(1) \neq 0$

$$\iff \begin{cases} 1 + a + b = 0 \\ 5 + 2a + b = 0 \\ 20 + 2a \neq 0 \end{cases}$$

$$\iff a = -4 \text{ et } b = 3$$

On obtient $X^5 - 4X^2 + 3X = X(X-1)^2(X^2 + 2X + 3)$ et c'est la factorisation cherchée car le discriminant de $X^2 + 2X + 3$ est strictement négatif.

PIERRE-ALAIN SALLARD
chez FRÉDÉRIC GAUNARD
Classe de PT – 2024/2025

Semaine 1

Trigonométrie, calcul algébrique ; Racines de l'unité ; Polynômes

Question de cours. Calculer, pour $\theta \not\equiv 0 [2\pi]$ et $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^n \sin(k\theta)$.

Exercice 1 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sin(5x) = \sin(3x)$.

Exercice 2 Soit $P = (X + 1)^7 - X^7 - 1$.

Démontrer que $e^{i\frac{2\pi}{3}}$ est une racine de P et déterminer sa multiplicité.

Éléments de correction

Question de cours. Pour $\theta \neq 0 [2\pi]$ et $n \in \mathbb{N}$, on obtient

$$\sum_{k=0}^n \sin(k\theta) = \sin\left(\frac{n\theta}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

Exercice 1 Avec la formule $\sin(a) - \sin(b) = 2 \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$, on obtient $\sin(5x) - \sin(3x) = 2 \cos(4x) \sin(x) = 0 \iff x \equiv 0 [\pi]$ ou $x \equiv \frac{\pi}{8} [\frac{\pi}{4}]$.

Exercice 2

• On sait que j vérifie $j^2 + j + 1 = 0$ donc $j + 1 = -j^2$. Ainsi $P(j) = -j^{14} - j^7 - 1$. Or $j^3 = 1 \implies j^7 = j$ et $j^{14} = j^2$ donc il vient $P(j) = -j^2 - j - 1 = 0$. CQFD.

• Puisque $P'(X) = 7[(X+1)^6 - X^6]$ et que $(j+1)^6 - j^6 = j^{12} - j^6 = 1 - 1 = 0$, on a $P'(j) = 0$ donc j est au moins de multiplicité 2.

Puisque $P'' = 42[(X+1)^5 - X^5]$ et que $(j+1)^5 - j^5 = -j^{10} - j^5 = -j - j^2 = 1$, on a $P''(-j) \neq 0$. Donc j est de multiplicité 2.

PIERRE-ALAIN SALLARD
chez FRÉDÉRIC GAUNARD
Classe de PT – 2024/2025

Semaine 1

Trigonométrie, calcul algébrique ; Racines de l'unité ; Polynômes

Question de cours. Exprimer $\sin(5\theta)$ en fonction de $\sin(\theta)$.

Exercice 1 Résoudre sur $[0, 2\pi]$ l'inéquation $\cos(x) \geq \cos(3x)$.

Exercice 2 Après avoir justifié que, pour tous $n, k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n} \binom{n}{k} = \frac{1}{k} \binom{n-1}{k-1}$, démontrer que, pour tout entier naturel n ,

$$\sum_{k=0}^n (k+1) \binom{n}{k} = (n+2)2^{n-1}$$

Éléments de correction

Question de cours. On obtient

$$\begin{aligned}\sin(5\theta) &= 5\cos^4(x)\sin(x) - 10\cos^2(x)\sin^3(x) + \sin^5(x) \\ &= 16\sin^5(x) - 20\sin^3(x) + 5\sin(x)\end{aligned}$$

Exercice 1

Avec la formule $\cos(a) - \cos(b) = -2\sin(\frac{a+b}{2})\sin(\frac{a-b}{2})$, on obtient $\cos(x) \geq \cos(3x) \iff \sin(x)\sin(2x) \geq 0$. On fait un tableau de signes sur $[0, 2\pi]$ pour obtenir comme ensemble de solution $[0, \frac{\pi}{2}] \cup [\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$.

Exercice 2

Par calcul direct, avec $\sum_{k=0}^n (k+1)\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n k\binom{n}{k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^n n\binom{n-1}{k-1} + 2^n = n \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} + 2^n = n2^{n-1} + 2^n = (n+2)2^{n-1}$.

Ou bien en utilisant la formule du binôme, $f(x) := x(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{k+1}$. En dérivant, $f'(x) = \sum_{k=0}^n (k+1)\binom{n}{k} x^k = (1+x)^n + nx(1+x)^{n-1} = (1+(n+1)x)(1+x)^{n-1}$. L'évaluation en $x=1$ donne le résultat attendu.