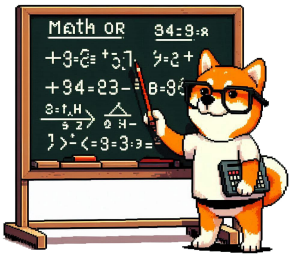
Mathématiques PT. 2025 - 2026

Mathématiques & Informatique - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
Lycée Voltaire, Paris 11e.



Semaine de colle n°13

Du Lundi 5 Janvier au Vendredi 9 Janvier
Planche n°1

Question de cours

Exercice 1

$\mathbb{R}^4$ est muni de sa structure euclidienne canonique. On considère le sous-espaces F de $\mathbb{R}^4$ défini par :

$$F = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + z + t = 0 \text{ et } x - y + z = 0\right\}.$$

Déterminer une base orthonormale de F.

Exercice 2

Soit E un espace euclidien dont le produit scalaire est noté $(\cdot|\cdot)$.

1. Rappeler l'expression de la norme d'un vecteur x dans une base orthonormée $(e_1, ..., e_n)$ de E.
2. Soit $(v_1, ..., v_k)$ une famille de vecteurs de E, tous de norme 1, telle que

$$\forall x \in E, \qquad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{k} (x|v_i)^2.$$

Le but de la question est de montrer que, nécessairement, $k = n$ et que $(v_1, ..., v_k)$ forme une b.o.n de E.

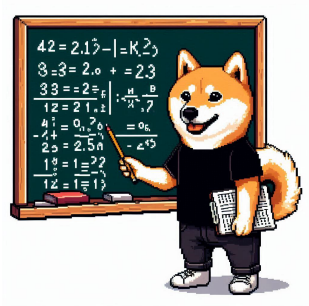
a. Montrer que $(v_1, ..., v_k)$ est orthogonale. En déduire qu'elle est libre.

b. Soient $x \in E$ et $y = \sum_{i=1}^{k} (x|v_i)v_i$. Montrer que $\|x - y\| = 0$.

c. Conclure.

Mathématiques PT. 2025 - 2026

Mathématiques & Informatique - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
Lycée Voltaire, Paris 11e.



Semaine de colle n°13

Du Lundi 5 Janvier au Vendredi 9 Janvier
Planche n°2

Question de cours

Énoncé de la formule d'Al-Kashi (**Proposition 11.3**), de l'inégalité de Cauchy-Schwarz (**Théorème 11.4**), de l'inégalité triangulaire (**Proposition 11.5**) et du théorème de Pythagore (**Théorèmes 11.7, 11.8**) dans un espace pré-hilbertien réel $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

Exercice 1

Dans tous les exercice, on considère $a_0, a_1, ...a_n$ des réels **distincts**. On introduit, pour $P, Q \in E = \mathbb{R}_n[X]$ l'application φ définie sur $E \times E$ par

$$\varphi(P, Q) = \sum_{i=1}^{n} P(a_i)Q(a_i)$$

1. Montrer que φ définit un produit scalaire sur E.
2. On introduit la famille $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$ définie par

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \qquad P_k(X) = \prod_{j \in [\![0,n]\!] \setminus \{k\}} (X - a_j).$$

a. Vérifier que (P_k) est une famille orthogonale.
b. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, déterminer $||P_k||$.

Exercice 2

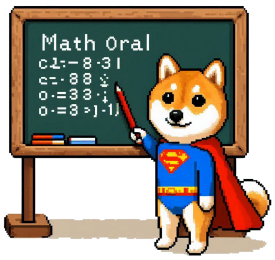
On considère l'équation différentielle linéaire homogène du second ordre :

$$16\left(x^2 - x\right)y'' + (16x - 8)y' - y = 0 \qquad (\mathcal{E})$$

On suppose que la série entière $\sum_{n \geqslant 0} a_n x^n$ est solution de $(\mathcal{E})$ sur $]0; R[$ où R est le rayon de convergence de $\sum_{n \geqslant 0} a_n x^n$.

1. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$: $\quad a_n = \dfrac{(4n-3)(4n-5)}{8n(2n-1)} a_{n-1}$.
2. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$.
3. On suppose que $a_0 = 1$. Déterminer a_n en fonction de n.

Mathématiques & Informatique - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
Lycée Voltaire, Paris 11e.



Semaine de colle n°13

Du Lundi 5 Janvier au Vendredi 9 Janvier
Planche n°3

Question de cours

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R}$. Démontrer que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définie sur $\mathbb{R}_n[X]^2$ par

$$(P, Q) \mapsto \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)Q^{(k)}(a)}{(k!)^2}$$

définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
Vérifier que la famille $(P_j)_{0 \leq j \leq n}$ est orthonormée pour ce produit scalaire, où $P_j(X) = (X - a)^j$.

Exercice 1

Résoudre, dans $\mathbb{C}$, $e^z + e^{-z} = 1$.

Exercice 2

1. Montrer que $f : x \longmapsto \mathrm{e}^{-x^2/2} \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{t^2/2}\, \mathrm{d}t$ est solution de $y' = 1 - xy$.

2. En déduire le développement en série entière de f et son rayon de convergence.

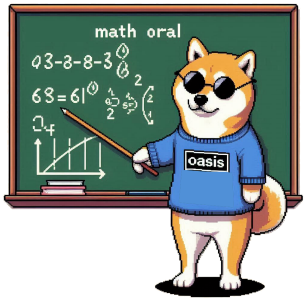
Exercice 3

Dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique $\langle A, B \rangle = \operatorname{tr}\left(A^\top B\right)$, orthonormaliser par le procédé de Gram-Schmidt la famille (A_1, A_2, A_3) avec

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Mathématiques PT. 2025 - 2026

Mathématiques & Informatique - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
Lycée Voltaire, Paris 11e.



Semaine de colle n°13

Du Lundi 5 Janvier au Vendredi 9 Janvier
Planche n°4

Question de cours

Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, orthonormaliser en suivant le procédé de Gram-Schmidt la base (u_1, u_2, u_3) où

$$u_1 = (1, 0, 1), \quad u_2 = (1, 1, 1), \quad u_3 = (-1, -1, 0).$$

Exercice 1

Pour $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $v = (x', y') \in \mathbb{R}^2$, on pose $\varphi(u, v) = 2xx' + 2yy' + xy' + x'y$.

1. Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.
2. Vérifier que la base canonique de $\mathbb{R}^2$ n'est pas orthogonale pour ce produit scalaire.
3. Construire une base de $\mathbb{R}^2$ orthonormée pour ce produit scalaire.

Exercice 2

Soit $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{1 \times 3 \cdots \times (2n+1)} x^{2n+1}$.

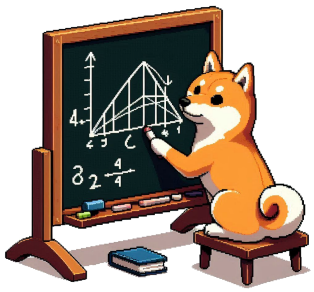
1. Déterminer le rayon de convergence de cette série entière.

2. Trouver une relation entre $f(x)$ et $\left(x^2 - 2\right) f'(x) + 2$.

3. Résoudre l'équation différentielle obtenue. En déduire $f(x)$.

Mathématiques PT. 2025 - 2026

Mathématiques & Informatique - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
Lycée Voltaire, Paris 11e.



Semaine de colle n°13

Du Lundi 5 Janvier au Vendredi 9 Janvier
Planche n°5

Question de cours

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R}$. Démontrer que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définie sur $\mathbb{R}_n[X]^2$ par

$$(P, Q) \mapsto \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)Q^{(k)}(a)}{(k!)^2}$$

définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
Vérifier que la famille $(P_j)_{0 \leq j \leq n}$ est orthonormée pour ce produit scalaire, où $P_j(X) = (X - a)^j$.

Exercice 1

1. Montrer que : $\forall (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathbb{R}^{n^2}, \left| \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \right| \leq n \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^2}$. Étudier le cas d'égalité.

2. Montrer que $\forall f \in \mathscr{C}^0\left([a, b], \mathbb{R}_+^*\right), \left(\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right)\left(\int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{f(t)}\right) \geq (b - a)^2$. Étudier le cas d'égalité.

Exercice 2

On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(n\theta)x^n}{n!}$, où $\theta \in \mathbb{R}$ est fixé.

1. Montrer que f est définie et de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

2. Exprimer $f''(x) + f(x)$ en fonction de $f'(x)$. En déduire $f(x)$.

3. Retrouver ce résultat en utilisant le DSE de l'exponentielle complexe.

Mathématiques PT. 2025 - 2026

Mathématiques & Informatique - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
Lycée Voltaire, Paris 11e.

Semaine de colle n°13

Du Lundi 5 Janvier au Vendredi 9 Janvier
Planche n°6

Question de cours

Exercice 1

On considère l'ensemble

$$E = \{P \in \mathbb{R}[X] : \ P(0) = P(1) = 0\}$$

1. Montrer que E est un espace vectoriel.

2. Montrer que l'application φ définie sur $E \times E$ par

$$\varphi(P, Q) = -\int_0^1 P(t)Q''(t)\mathrm{d}t$$

est un produit scalaire sur E.

3. On considère le sous-espace $F = E \cap \mathbb{R}_3[X]$.
- **a**. Déterminer une base de F.
- **b**. Déterminer une base de F, orthonormée pour φ, construite par le procédé de Gram-Schmidt à partir de la base précédente.

Exercice 2

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 10 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que l'application $\varphi : (u, v) \mapsto {}^t XMY$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$ (où X et Y représentent respectivement les vecteurs colonnes des coordonnées de u et v dans la base canonique).

2. À l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée à un v bien choisi, montrer que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \qquad (x + 4y)^2 \leq 2\left(x^2 + 6xy + 10y^2\right)$$

A] **Question de cours :**

On considère la série entière $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n n!} x^{2n}$

a. Déterminer le rayon de convergence de la série et exprimer sa somme f à l'aide de fonctions usuelles.

b. Vérifier que f est solution de l'équation différentielle y'' + xy' + y = 1.

c. En déduire l'unique solution du problème de Cauchy
y'' + xy' + y = 1 avec y(0) = y'(0) = 0

Exercices :

1) Développer en série entière $x \mapsto \sin^2 x \cos x$. Préciser le rayon de convergence.

2) a) Montrer que $(P|Q)=P(0)Q(0)+P(1)Q(1)+P(2)Q(2)$ définit un produit scalaire sur $R_2[X]$.
b) Trouver une base orthonormale de $R_2[X]$ pour ce produit scalaire.

3) Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n z^{2n}$ avec $a_n = \frac{(2n)!}{n^n n!}$.

B] **Question de cours :**

Soient n un entier naturel et a un réel. Démontrer que l'application définie sur $R_n[X]^2$ par :
$(P,Q) \longmapsto \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)Q^{(k)}(a)}{(k!)^2}$ définit un produit scalaire sur $R_n[X]$.
Vérifier que la famille $(P_j)_{0\leq j\leq n}$ est orthonormée pour ce produit scalaire, où $P_j(X) = (X-a)^j$

Exercices :

1) Montrer que la fonction $f : x \mapsto (\arcsin x)^2$ est développable en série entière autour de 0 et donner ce DES.

2) On note $E = R[X]$ et on considère l'application $\phi : E \times E \to R$ donnée par :

$$\varphi(P,Q) = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt$$

a) Montrer que l'application φ définit un produit scalaire sur E.
b) Trouver une base orthonornale de $F=R_2[X]$ pour ce produit scalaire.

C] **<u>Question de cours :</u>**

Dans R^3 muni du produit scalaire canonique, orthonormaliser en suivant le procédé de Gram-Schmidt la base $(u_1; u_2; u_3)$ où $u_1 = (1; 0; 1)$; $u_2 = (1; 1; 1)$ et $u_3 = (-1;-1;0)$

<u>Exercices :</u>

1) Montrer que la fonction $f : x \mapsto e^{x^2} \int_0^x e^{-t^2}\, dt$ est développable en série entière autour de 0 et donner ce DSE.

2) On note $E = R[X]$ et on considère l'application $\phi : E \times E \to R$ donnée par :

$$\varphi(P,Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}\, dt$$

a) Montrer que l'application φ définit un produit scalaire sur E.

b) Pour p et q deux entiers naturels , calculer $\varphi(X^p, X^q)$.

c) Trouver une base orthonornale de $R_2[X]$ pour ce produit scalaire.

3)

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

1) Montrez A admet 3 valeurs propres distinctes que l'on ne calculera pas mais dont on déterminera les parties entières.

2) Déterminez le rayon de convergence et la somme de $x \longrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{tr}(A^n)\, x^n$.