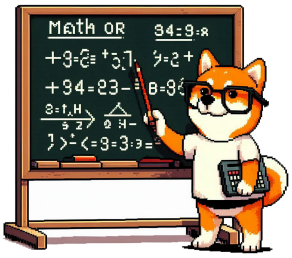
Mathématiques PT. 2025 - 2026

Mathématiques & Informatique - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
Lycée Voltaire, Paris 11e.



Semaine de colle n°14

Du Lundi 12 Janvier au Vendredi 16 Janvier
Planche n°1

Question de cours

Énoncé de la formule d'Al-Kashi (**Proposition 11.3**), de l'inégalité de Cauchy-Schwarz (**Théorème 11.4**), de l'inégalité triangulaire (**Proposition 11.5**) et du théorème de Pythagore (**Théorèmes 11.7, 11.8**) dans un espace pré-hilbertien réel $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

Exercice 1

Soit $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ que l'on munit du produit scalaire

$$\langle M, N \rangle = \mathrm{Tr}\left(M^\top N\right)$$

On pose $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} ; (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

1. Déterminer une base orthonormée de $F^\perp$.
2. Calculer la projection de $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur $F^\perp$.
3. Calculer la distance de J à F.

Exercice 2

Soit E un espace euclidien dont le produit scalaire est noté $(\cdot|\cdot)$.

1. Rappeler l'expression de la norme d'un vecteur x dans une base orthonormée $(e_1, ..., e_n)$ de E.
2. Soit $(v_1, ..., v_k)$ une famille de vecteurs de E, tous de norme 1, telle que

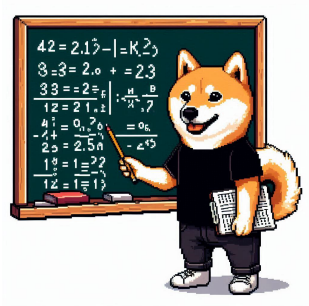
$$\forall x \in E, \qquad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{k} (x|v_i)^2.$$

Le but de la question est de montrer que, nécessairement, $k = n$ et que $(v_1, ..., v_k)$ forme une b.o.n de E.

a. Montrer que $(v_1, ..., v_k)$ est orthogonale. En déduire qu'elle est libre.
b. Soient $x \in E$ et $y = \sum_{i=1}^{k} (x|v_i) v_i$. Montrer que $\|x - y\| = 0$.
c. Conclure.

Mathématiques PT. 2025 - 2026

Mathématiques & Informatique - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
Lycée Voltaire, Paris 11e.



Semaine de colle n°14

Du Lundi 12 Janvier au Vendredi 16 Janvier
Planche n°2

Question de cours

Résoudre, sur $\mathbb{R}$, l'équation différentielle

$$t^2y' + y = 1.$$

Exercice 1 - Oral Math II 2025

Dans $\mathbb{R}^4$, soit $F : \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$.

1. Donner la dimension de F, une base de F et une base de $F^\perp$.
2. Déterminer la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur F.
3. Donner la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur $F^\perp$.
4. Déterminer la distance du vecteur $X = (1, 2, 3, 4)$ à F.

Exercice 2

Soient E un espace euclidien de dimension n et p un projecteur orthogonal de E de rang r.
On note $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une BON de E et $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ la matrice de p dans la base $\mathscr{B}$.

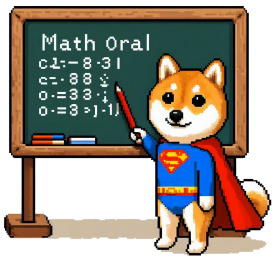
1. Montrer que $\forall x \in E, \|p(x)\|^2 = (p(x) \mid x)$.
2. Montrer que $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \|p(e_j)\|^2 = r$. En déduire que $\displaystyle\sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij}^2 = r$.

Exercice 3

Soit E un espace préhilbertien réel, et F, G deux sous-espaces vectoriels de E. Démontrer les résultats suivants.
1. $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.
2. $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$ si E est de dimension finie.

Mathématiques PT. 2025 - 2026

Mathématiques & Informatique - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
Lycée Voltaire, Paris 11e.



Semaine de colle n°14

Du Lundi 12 Janvier au Vendredi 16 Janvier
Planche n°3

Question de cours

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R}$. Démontrer que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définie sur $\mathbb{R}_n[X]^2$ par

$$(P, Q) \mapsto \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)Q^{(k)}(a)}{(k!)^2}$$

définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
Vérifier que la famille $(P_j)_{0 \leq j \leq n}$ est orthonormée pour ce produit scalaire, où $P_j(X) = (X - a)^j$.

Exercice 1

Dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique $\langle A, B \rangle = \operatorname{tr}\left(A^\top B\right)$, orthonormaliser par le procédé de Gram-Schmidt la famille (A_1, A_2, A_3) avec

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 - Mines-Telecom 2024

Dans $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique, soit u non nul et, pour $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$f_\alpha(x) = x + \alpha \langle x, u \rangle u, \forall x \in \mathbb{R}^n$$

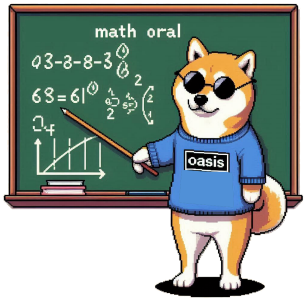
1. Montrer que $f_\alpha \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$.
2. Montrer que $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \exists m \in \mathbb{R}, f_\alpha \circ f_\beta = f_m$. Exprimer m en fonction de α et β.
3. Existe-t-il $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que f_α est bijective?

Exercice 3

Déterminer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ qui minimise $\delta(a, b, c) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \left(\mathrm{e}^t - at^2 - bt - c\right)^2 \, \mathrm{d}t$.

Mathématiques PT. 2025 - 2026

Mathématiques & Informatique - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
Lycée Voltaire, Paris 11e.



Semaine de colle n°14

Du Lundi 12 Janvier au Vendredi 16 Janvier
Planche n°4

Question de cours

Soient E un espace euclidien et H un hyperplan de E de vecteur normal u. Donner l'expression, en détaillant toutes les étapes, pour tout $x \in E$ de la distance de x à H (en fonction de x et de u).

Exercice 1 - Oral Math II 2019

1. Montrer que $E = \left\{ f \in \mathscr{C}^1([0,+\infty[,\mathbb{R}), f(0)=0, f \text{ bornée } \right\}$ est un espace vectoriel.

2. Montrer que, pour $(f,g) \in E^2$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(t)g(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

3. Montrer que $\varphi : (f,g) \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(t)g(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ est un produit scalaire sur E.

4. Montrer, pour $(f,g) \in E^2$, l'égalité $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(t)g(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{f'(t)g(t)+f(t)g'(t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

5. Soit $G = \mathrm{Vect}\,(g_1,g_2)$, où $g_k : t \longmapsto 1-e^{-kt}$. On **admet**[1] que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\,\mathrm{d}t = \ln(b/a)$.
Déterminer la projection orthogonale de $f \in E$ sur G.

Exercice 2

Déterminer l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) - \int_0^x t f(t)\mathrm{d}t = 1.$$

Exercice 3

Soit l'espace euclidien $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire (canonique) $\langle A,B\rangle = \mathrm{tr}\left(A^T B\right)$.

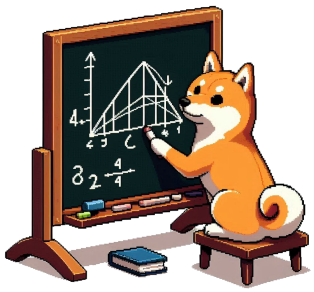
1. Soit p la projection orthogonale sur $F = \mathrm{Vect}\,(I_n)$. Déterminer $F^\perp$ et $p(M), M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ sont des s.e.v. supplémentaires et orthogonaux de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
3. Montrer que $\forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \mathrm{d}\,(M, \mathscr{S}_n(\mathbb{R})) = \dfrac{1}{2}\left\|M - M^T\right\|$.

---

[1] On renvoie à ce sujet pour une preuve

Mathématiques PT. 2025 - 2026

Mathématiques & Informatique - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
Lycée Voltaire, Paris 11e.



Semaine de colle n°14

Du Lundi 12 Janvier au Vendredi 16 Janvier
Planche n°5

Question de cours

Résoudre, sur $\mathbb{R}$, l'équation différentielle

$$t^2y' + y = 1.$$

Exercice 1

Dans $\mathbb{R}^4$ muni de sa base canonique $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ on note F le s.e.v. de $\mathbb{R}^4$ d'équations:

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x + 2y + 3z + 4t = 0 \end{cases}.$$

1. Montrer que F est un plan vectoriel, puis déterminer une base orthonormale de F.
2. Déterminer le supplémentaire orthogonal de F (équations, base et dimension).
3. Déterminer la matrice dans la base $\mathscr{B}$ du projecteur orthogonal sur F.
4. Déterminer $\mathrm{d}(u, F)$ pour tout $u \in \mathbb{R}^4$.

Exercice 2 - Mines-Télécom 2024

Soit un espace euclidien $(E, (\cdot \mid \cdot))$ tel que $\dim(E) = n$ et $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une BON de E.

1. Donner l'expression matricielle du produit scalaire de x et y dans $\mathscr{B}$.
2. Soient $f, f^* \in \mathscr{L}(E)$ de matrices respectives A, A^T dans $\mathscr{B}$. Montrer que $(f(x) \mid y) = (x \mid f^*(y))$.
3. Définir un projecteur orthogonal p de E. Montrer que $(p(x) \mid y) = (p(x) \mid p(y))$.

Mathématiques PT. 2025 - 2026

Mathématiques & Informatique - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
Lycée Voltaire, Paris 11e.

Semaine de colle n°14

Du Lundi 12 Janvier au Vendredi 16 Janvier
Planche n°6

Question de cours

Soient E un espace pré-hilbertien muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et $f \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que, si f est représenté, dans une base orthonormée de E, par une matrice symétrique, alors $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont orthogonaux.
Soit p un projecteur de E. Montrer que p est un projecteur orthogonal de E si et seulement si il est représenté, dans une base orthonormée, par une matrice symétrique.

Exercice 1

Calculer $\displaystyle\min_{a,b\in\mathbb{R}} \int_0^{2\pi} (t - a\cos(t) - b\sin(t))^2 \mathrm{d}t$.

Exercice 2

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 10 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que l'application $\varphi : (u, v) \mapsto {}^t XMY$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$ (où X et Y représentent respectivement les vecteurs colonnes des coordonnées de u et v dans la base canonique).
2. À l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée à un v bien choisi, montrer que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \qquad (x + 4y)^2 \leq 2\left(x^2 + 6xy + 10y^2\right)$$

Exercice 3

Résoudre le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} (1+t)^3 y' + 2(1+t)^2 y = 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Construire la courbe intégrale correspondante.

Pierre-Alain Sallard
chez Frédéric Gaunard
Classe de PT – 2025/2026

Semaine 14

Espaces pré-hilbertiens – Équations différentielles

Question de cours. Résoudre, sur $\mathbb{R}$, l'équation différentielle

$$t^2 y' + y = 1$$

Exercice 1. On munit l'espace $\mathrm{E} = \mathbb{R}_3[\mathrm{X}]$ du produit scalaire défini par $\langle \mathrm{P}, \mathrm{Q} \rangle = \int_{-1}^{1} \mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)\,\mathrm{d}t$.
Soit $\mathrm{F} = \{\mathrm{P} \in \mathrm{E} \mid \left\langle \mathrm{X}^2 - 1, \mathrm{P}' \right\rangle = \langle \mathrm{X}, \mathrm{P} \rangle\}$.

1. Justifier que $\mathrm{F} = \{\mathrm{X}\}^{\perp}$.
2. Soit $\mathrm{Q} = 1 + \mathrm{X} + \mathrm{X}^2 + \mathrm{X}^3$: calculer $d(\mathrm{Q}, \mathrm{F})$.

Exercice 2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$(1 + x^2)y' - 2x\,y = x^2$$

Élements de correction

Exercice 1.

• On montre que $\mathrm{P} \in \mathrm{F} \implies$ (par IPP) $\int_{-1}^{1} x\mathrm{P}(x)\,\mathrm{d}x = 0 \implies \langle \mathrm{X}, \mathrm{P}\rangle = 0 \implies \mathrm{P} \in \{\mathrm{X}\}^{\perp}$. Puis on montre l'inclusion réciproque, de sorte que $\mathrm{F} = \{\mathrm{X}\}^{\perp}$.

• Puisque $\mathrm{F}^{\perp}$ est la droite vectorielle engendrée par X, il vient que $d(\mathrm{Q}, \mathrm{F}) = \left\|\mathrm{Q} - p_{\mathrm{F}}(\mathrm{Q})\right\| = \left\|p_{\mathrm{F}^{\perp}}(\mathrm{Q})\right\| = \frac{\langle \mathrm{X}, \mathrm{Q}\rangle}{\|\mathrm{X}\|}$. Après calculs (notamment $\|\mathrm{X}\|^2 = \int_{-1}^{1} x^2\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}$), il vient que $d(\mathrm{Q}, \mathrm{F}) = \frac{16/15}{\sqrt{2/3}} = \frac{8\sqrt{6}}{15}$.

Exercice 2.

Solution homogène : $y_{\mathrm{H}}(x) = \mathrm{C}(1 + x^2)$.

Puis méthode de la variation de la constante $\implies \mathrm{C}'(x) = \frac{x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{x}{(1+x^2)^2} \times x$, que l'on intègre par parties, avec $v' = \frac{x}{(1+x^2)^2} = -\frac{1}{2}(\frac{1}{1+x^2})'$ et $u = x$.

Il vient que $\mathrm{C}(x) = [-\frac{x}{2(1+x^2)}] + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x^2} = -\frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\arctan x$.

Les solutions sont donc de la forme $y(x) = (-\frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\arctan x + \mathrm{C})(1 + x^2)$.

Pierre-Alain Sallard
chez Frédéric Gaunard
Classe de PT – 2025/2026

Semaine 14

Espaces pré-hilbertiens – Équations différentielles

Question de cours. Dans $\mathbb{R}^4$ muni de son produit scalaire canonique, on considère F le sous-espace vectoriel défini par

$$\mathrm{F} = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \colon x + y + t = 0 \text{ et } x + y + 2z - t = 0\right\}$$

Déterminer le projeté orthogonal de $u = (1, 8, 1, 1)$ sur F.

Exercice 1. Soit $(\mathrm{E}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$.
Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ est dit antisymétrique s'il vérifie :

$$\forall (x; y) \in \mathrm{E}^2,\ \langle u(x), y \rangle = -\langle x, u(y) \rangle$$

1. Montrer que u est antisymétrique si et seulement si il vérifie : $\forall x \in \mathrm{E},\ \langle u(x), x \rangle = 0$.
2. Soit $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ un endomorphisme antisymétrique.
   Démontrer que $\operatorname{Im} u$ est le supplémentaire orthogonal de $\operatorname{Ker} u$.

Exercice 2. Résoudre sur $]-1\,,1[$ l'équation différentielle suivante :

$$(1 - x^2)y' + (x - 2)y = 3$$

Élements de correction

Exercice 1.

- $\Longrightarrow$ $\langle u(x), x\rangle = -\langle x, u(x)\rangle$ donc on a bien $\langle u(x), x\rangle = 0$.

  $\Longleftarrow$ De l'égalité $\langle u(x-y), x-y\rangle = 0$, on déduit que $0 = \cancel{\langle u(x), x\rangle} - \langle u(x), y\rangle - \langle u(y), x\rangle + \cancel{\langle u(y), y\rangle} = -\langle u(x), y\rangle - \langle u(y), x\rangle$, d'où le résultat.
- Soit $x \in \operatorname{Im} u$: $x = u(z)$. Pour tout $y \in \operatorname{Ker} u$, $\langle x, y\rangle = \langle u(z), y\rangle = -\langle z, u(y)\rangle = -\langle z, 0\rangle = 0$: ainsi $\operatorname{Im} u \subset (\operatorname{Ker} u)^{\perp}$. Or on sait que $\dim(\operatorname{Ker} u)^{\perp} = n - \dim \operatorname{Ker} u = \dim \operatorname{Im} u$ (par le théorème du rang) : on a donc l'égalité $\operatorname{Im} u = (\operatorname{Ker} u)^{\perp}$.

Exercice 2. Pour l'équation homogène, on décompose en éléments simples $\frac{2-x}{1-x^2} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-x} + \frac{3}{2}\frac{1}{1+x}$. Alors, pour $x \in]-1, 1[$, $(\ln|y|)' = \frac{y'}{y} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-x} + \frac{3}{2}\frac{1}{1+x} = -\frac{1}{2}(\ln(1-x))' + \frac{3}{2}(\ln(1+x))'$, d'où $y(x) = \mathrm{C}\frac{(1+x)^{3/2}}{\sqrt{1-x}}$.

On pourrait tenter d'obtenir une solution particulière avec la méthode de la variation de la constante mais, compte-tenu des paramètres de l'équation (polynômes), on peut tenter la recherche d'une solution particulière de la forme $y_0(x) = ax + b$: ceci donne $a = -1$ et $b = -2$.

L'équation a donc pour solutions les fonctions de la forme $y(x) = \mathrm{C}\frac{(1+x)^{3/2}}{\sqrt{1-x}} - x - 2$.

Pierre-Alain Sallard
chez Frédéric Gaunard
Classe de PT – 2025/2026

Semaine 14

Espaces pré-hilbertiens – Équations différentielles

Question de cours. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R}$.
Démontrer que l'application $(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]^2 \mapsto \sum_{k=0}^{n} \frac{\mathrm{P}^{(k)}(a)\mathrm{Q}^{(k)}(a)}{(k\,!)^2}$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.
Vérifier que la famille $(\mathrm{P}_j)_{0 \leqslant j \leqslant n}$ est orthonormée pour ce produit scalaire, où $\mathrm{P}_j(\mathrm{X}) = (\mathrm{X} - a)^j$.

Exercice 1. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire usuel et on considère le sous-espace vectoriel F d'équation $x + y + 2z = 0$.

1. Déterminer une base orthonormée de F.
2. Déterminer la matrice dans la base canonique du projecteur orthogonal sur F.

Exercice 2. Résoudre sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ l'équation différentielle

$$y' + \tan(x)\, y = \cos^2(x)$$

Élements de correction

Exercice 1.

- F est un plan, admettant $u_1 = (1;-1;0)$ et $u_2 = (2;0;-1)$ comme base non orthonormée. On normalise u_1 en $\varepsilon_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}u_1$; puis Gram-Schmidt $\implies \varepsilon_2' = u_2 - \langle u_2, \varepsilon_1 \rangle \varepsilon_1 = (1;1;-1)$, que l'on normalise en $\varepsilon_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1;1;-1)$. Ainsi, $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ est une BON de F.
- Le projecteur orthogonal sur F vérifie : $\forall x \in \mathrm{E}$, $p(x) = \langle x, \varepsilon_1 \rangle \varepsilon_1 + \langle x, \varepsilon_2 \rangle \varepsilon_2$. Ainsi, $p(e_1) = \frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\varepsilon_2 = (\frac{5}{6}; -\frac{1}{6}; -\frac{1}{3})$. Et de même, $p(e_2) = (-\frac{1}{6}; \frac{5}{6}; -\frac{1}{3})$ et $p(e_3) = (-\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}; \frac{1}{3})$.

  La matrice de p dans la base canonique est donc $\begin{pmatrix} \frac{5}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

  NB : on peut vérifier qu'avec $\vec{n} = (1;1;2)$, vecteur normal à F, on a bien $p(\vec{n}) = 0$.

Exercice 2.

Solution homogène $y = \mathrm{A}\cos x$, puis variation de la constante $\implies y(x) = (-\sin x + \mathrm{C})\cos x = -\frac{\sin 2x}{2} + \mathrm{C}\cos x$.

Colle PT – 14
Jeudi Février 2025

A] **Question de cours :**

Résoudre, sur R, l'équation différentielle : $t^2 y' + y = 1$.

Exercices :

1) a) Montrer que $(P|Q)=P(0)Q(0)+P(1)Q(1)+P(2)Q(2)$ définit un produit scalaire sur $R_2[X]$.

b) Trouver une base orthonormale de $R_2[X]$ pour ce produit scalaire.

2) Résoudre dans R l'équation : $(2+\cos x)y'+\sin(x)y=(2+\cos x)\sin x$ avec $y(0) = 2$

3) Déterminer $\inf\limits_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 \left(\sqrt{t} - at - b\right)^2 dt$

B] **Question de cours :**

Soient $n\in N$ et $a\in R$. Démontrer que l'application $\langle\cdot,\cdot\rangle$ définie sur $R_n[X]^2$ par :

$\langle P,Q\rangle=\sum_{k=0}^{n} \frac{P(k)(a)Q(k)(a)}{(k!)^2}$ définit un produit scalaire sur Rn[X].

Vérifier que la famille $(P_j)_{0\leq j\leq n}$ est orthonormée pour ce produit scalaire, où $P_j(X) = (X-a)^j$

Exercices :

1) Résoudre dans R l'équation différentielle : $(1 + \cos^2 x)\, y' - \sin(2x)\, y = \cos x$ avec $y(0) = 1$

2) On note $E = R[X]$ et on considère l'application $\phi : E \times E \to R$ donnée par :

$$\varphi(P,Q) = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt$$

a) Montrer que l'application φ définit un produit scalaire sur E.

b) Trouver une base orthonornale de $F=R_2[X]$ pour ce produit scalaire.

c) Déterminer $p_F(X^3)$ où p_F désigne la projection orthogonale sur F.

C] **Question de cours :**

Dans R^4 muni de son produit scalaire canonique, on considère F le sous-espace vectoriel défini par : $F=\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ : \ x+y+t=0 \ et \ x+y+2z-t=0\}$

Déterminer le projeté orthogonal de u = (1; 8; 1; 1) sur F.

Exercices :

1) Résoudre dans $]0\,;\pi[$ l'équation suivante : $(\sin x)^3 y' = 2(\cos x)y$ avec $y(0) = 1$

2) On note $E = R[X]$ et on considère l'application $\phi : E \times E \to R$ donnée par :

$$\varphi(P,Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}dt$$

a) Montrer que l'application φ définit un produit scalaire sur E.

b) Pour p et q deux entiers naturels , calculer $\varphi(X^p, X^q)$.

c) Trouver une base orthonornale de $R_2[X]$ pour ce produit scalaire.