Math PT. 2025 - 2026

Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
Lycée Voltaire, Paris 11e.

13 Semaine de colles n°13 : du 05/01 au 09/01

Programme

- ✗ **Chapitre 10**. Intégralité.
On proposera notamment un exercice dont la résolution nécessitera d'injecter le développement en série entière dans une équation différentielle.

- ✗ **Chapitre 11**. Produit scalaire. Norme. Orthogonalité jusqu'à Gram-Schmidt.
Je n'ai pas encore abordé la notion de supplémentaire orthogonal ni de projection orthogonale.
On proposera une orthonormalisation d'une famille de deux ou trois vecteurs via le procédé de G-S.

Questions de cours

Chaque étudiant.e devra traiter une de ces questions - choisie au hasard. Il est donc nécessaire de les avoir toutes préparées au préalable sous peine de passer un très mauvais moment.

1. Développements en série entière usuels (**Section 3.3** page 12).

2. Montrer que $x \mapsto \cos^3(x)$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et expliciter le développement.

3. On considère la série entière $\displaystyle\sum \frac{(-1)^{n+1}}{2^n n!} x^{2n}$.
a. Déterminer le rayon de convergence de la série. On note f sa fonction somme.
b. Vérifier que f est solution de l'équation différentielle $y'' + xy' + y = 1$.
c. Exprimer f à l'aide de fonctions usuelles.

4. Énoncé de la formule d'Al-Kashi (**Proposition 11.3**), de l'inégalité de Cauchy-Schwarz (**Théorème 11.4**), de l'inégalité triangulaire (**Proposition 11.5**) et du théorème de Pythagore (**Théorèmes 11.7, 11.8**) dans un espace pré-hilbertien réel $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

5. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R}$. Démontrer que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définie sur $\mathbb{R}_n[X]^2$ par

$$(P, Q) \mapsto \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a) Q^{(k)}(a)}{(k!)^2}$$

définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
Vérifier que la famille $(P_j)_{0 \leq j \leq n}$ est orthonormée pour ce produit scalaire, où $P_j(X) = (X - a)^j$.

6. Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, orthonormaliser en suivant le procédé de Gram-Schmidt la base (u_1, u_2, u_3) où

$$u_1 = (1, 0, 1), \quad u_2 = (1, 1, 1), \quad u_3 = (-1, -1, 0).$$