13

Semaine de colles n°14 : du 12/01 au 16/01

Programme

- ✗ **Chapitre 11**. Intégralité.
- ✗ **Chapitre 12**. Équations différentielles linéaires d'ordre 1 uniquement.

Questions de cours

Chaque étudiant.e devra traiter une de ces questions - choisie au hasard. Il est donc nécessaire de les avoir toutes préparées au préalable sous peine de passer un très mauvais moment.

1. Énoncé de la formule d'Al-Kashi (**Proposition 11.3**), de l'inégalité de Cauchy-Schwarz (**Théorème 11.4**), de l'inégalité triangulaire (**Proposition 11.5**) et du théorème de Pythagore (**Théorèmes 11.7, 11.8**) dans un espace pré-hilbertien réel $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

2. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R}$. Démontrer que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définie sur $\mathbb{R}_n[X]^2$ par
$$(P, Q) \mapsto \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)Q^{(k)}(a)}{(k!)^2}$$
définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
Vérifier que la famille $(P_j)_{0 \leq j \leq n}$ est orthonormée pour ce produit scalaire, où $P_j(X) = (X - a)^j$.

3. Soient E un espace pré-hilbertien muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et $f \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que, si f est représenté, dans une base orthonormée de E, par une matrice symétrique, alors $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont orthogonaux.
Soit p un projecteur de E. Montrer que p est un projecteur orthogonal de E si et seulement si il est représenté, dans une base orthonormée, par une matrice symétrique.

4. Soient E un espace euclidien et H un hyperplan de E de vecteur normal u. Donner l'expression, en détaillant toutes les étapes, pour tout $x \in E$ de la distance de x à H (en fonction de x et de u).

5. Dans $\mathbb{R}^4$ muni de son produit scalaire canonique, on considère F le sous-espace vectoriel défini par
$$F = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y + t = 0 \text{ et } x + y + 2z - t = 0\right\}.$$
Déterminer le projeté orthogonal de $u = (1, 8, 1, 1)$ sur F.

6. Résoudre, sur $\mathbb{R}$, l'équation différentielle
$$t^2 y' + y = 1.$$